

MÉCANIQUE DES STRUCTURES II – FORMULAIRE

Chapitre 1 : équilibre intérieur d'un solide

Allongement $\Delta\ell = \frac{P\ell}{EF}$; allongement spécifique $\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{\sigma}{E}$,

allongement transversal relatif, $\varepsilon_t = -\mu\varepsilon$; allongement thermique relatif $\varepsilon_\theta = \alpha\Delta\theta$.

Chapitre 2 : traction ou compression simple

Energie de déformation $U = \frac{EF(\Delta\ell)^2}{2\ell} = \frac{N\Delta\ell}{2} = \frac{N^2\ell}{2EF}$; $dU = \frac{N^2dx}{2EF}$; $u = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E\varepsilon^2}{2}$

Analyse de l'état de contrainte

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi; \quad \tau_\varphi = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi$$

Chapitre 3 : état de contrainte bidimensionnel

Allongement relatif $\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y)$; $\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x)$; $\varepsilon_z = \frac{-\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$

Énergie de déformation $u = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{E}\left(\frac{\sigma_x^2}{2} + \frac{\sigma_y^2}{2} - \mu\sigma_x\sigma_y\right)$

Analyse de l'état de contrainte

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_x \sin 2\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \cos 2(\varphi - \varphi_0)$$

$$\tau_\varphi = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_x \cos 2\varphi = -R \sin 2(\varphi - \varphi_0)$$

Cercle de Mohr : $C\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$; $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$

Contraintes principales $\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R$; $\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R$; $\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y}$.

Chapitre 4 : cisaillement simple

Angle de glissement $\gamma = \frac{\tau}{G}$, densité d'énergie de déformation $u = \frac{\tau\gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{G\gamma^2}{2}$,

module de glissement $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$.

Chapitre 5 : torsion circulaire

Contrainte de cisaillement $\tau = \frac{rM_t}{I_p}$; déformation $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GI_p}$;

Énergie de déformation $dU = \frac{M_t^2 dx}{2GI_p}$; $U = \frac{1}{2} M_t \varphi$; Puissance $P = M_t \omega$.

Chapitre 6 : flexion des poutres droites

Contrainte normale $\sigma_x = \frac{My}{I_z}$; Contrainte de cisaillement $\tau = \frac{TS'}{bI_z}$; $S' = \iint_{F'} y dF'$

Relation entre p , T et M $p = -\frac{dT}{dx}$; $T = \frac{dM}{dx}$

Énergie due au moment de flexion $dU = \frac{M^2}{2EI_z} dx$; $u = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{M^2}{2EI_z^2} y^2$

Énergie due à l'effort tranchant $dU = \eta \frac{dxT^2}{2GF} = \frac{dxT^2}{2GI_z^2} \iint_F \frac{S'^2}{b^2} dF$

Analyse de l'état de contrainte

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\varphi + \tau_x \sin 2\varphi = \frac{\sigma_x}{2} + R \cos 2(\varphi - \varphi_0)$$

$$\tau_\varphi = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi + \tau_x \sin 2\varphi = -R \sin 2(\varphi - \varphi_0)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_x^2}; \quad \text{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\tau_x}{\sigma_x}$$

Contraintes principales $\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + R$; $\sigma_2 = \frac{\sigma_x}{2} - R$.

Chapitre 7 : Déformée des poutres droites en flexion simple

Déformée due au moment de flexion : $y'' = -\frac{M(x)}{EI(x)}$

Déformée due à l'effort tranchant : $y_T'' = \eta \frac{M''(x)}{GF(x)}$

Chapitre 10 & 11 : Énergie de déformation élastique & systèmes hyperstatiques

Théorème de Castigliano

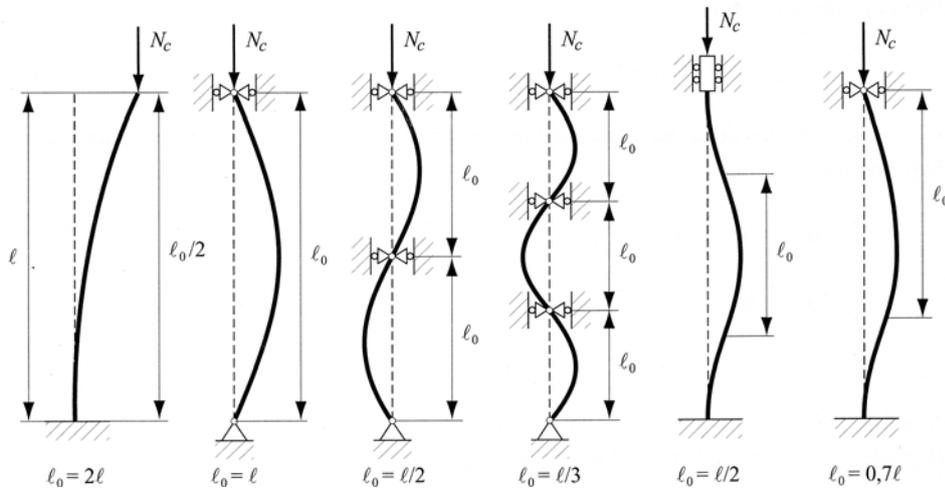
$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}; \quad U = \int_0^\ell \frac{N^2}{2EF} dx + \int_0^\ell \frac{M_t^2}{2GI_p} dx + \int_0^\ell \frac{M_f^2}{2EI} dx + \int_0^\ell \frac{\eta T^2}{2GF} dx$$

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k} = \int_0^\ell \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial P_k} dx + \int_0^\ell \frac{M_t}{GI_p} \frac{\partial M_t}{\partial P_k} dx + \int_0^\ell \frac{M_f}{EI} \frac{\partial M_f}{\partial P_k} dx + \int_0^\ell \frac{\eta T^2}{GF} \frac{\partial T}{\partial P_k} dx$$

Théorème de Menabrea

$$\frac{\partial U}{\partial R_1} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial R_2} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial R_3} = 0; \dots; \quad \frac{\partial U}{\partial R_k} = 0;$$

Chapitre 12 : Flambage des poutre droites



$$N_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell_0^2}; \quad \sigma_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell_0^2 F} = \frac{\pi^2 E i^2}{\ell_0^2} = \frac{\pi^2 E}{\ell_0^2 / i^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2};$$

$$\lambda_p = \pi \sqrt{E / \sigma_p}; \quad \sigma_c = \sigma_{BC} - \frac{\lambda}{\lambda_p} (\sigma_{BC} - \sigma_p)$$

$$N_c = \frac{U}{t}; \quad t = \frac{1}{2} \int_0^\ell y'^2 dx; \quad U = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M_f^2}{EI} dx = \frac{EI}{2} \int_0^\ell y''^2 dx$$

Chapitre 13 : Analyse des états de contrainte et de déformation

Équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_k & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_k & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_k \end{vmatrix} = \sigma_k^3 - I_\sigma \sigma_k^2 + II_\sigma \sigma_k - III_\sigma = 0$$

$$I_{\sigma} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$II_{\sigma} = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$III_{\sigma} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$

Chapitre 15 : Critères de rupture de l'équilibre élastique

Coefficient de sécurité et contraintes de comparaison :

Critère de Mohr-Coulomb

$$n = \frac{\sigma_{et}}{\sigma_1 - \alpha \sigma_3}$$

$$\sigma_g = \sigma_1 - \alpha \sigma_3$$

Critère de Tresca

$$n = \frac{\sigma_e}{\sigma_1 - \sigma_3}$$

$$\sigma_g = \sigma_1 - \sigma_3$$

Critère de von Mises

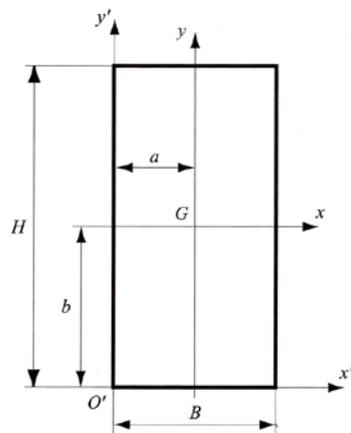
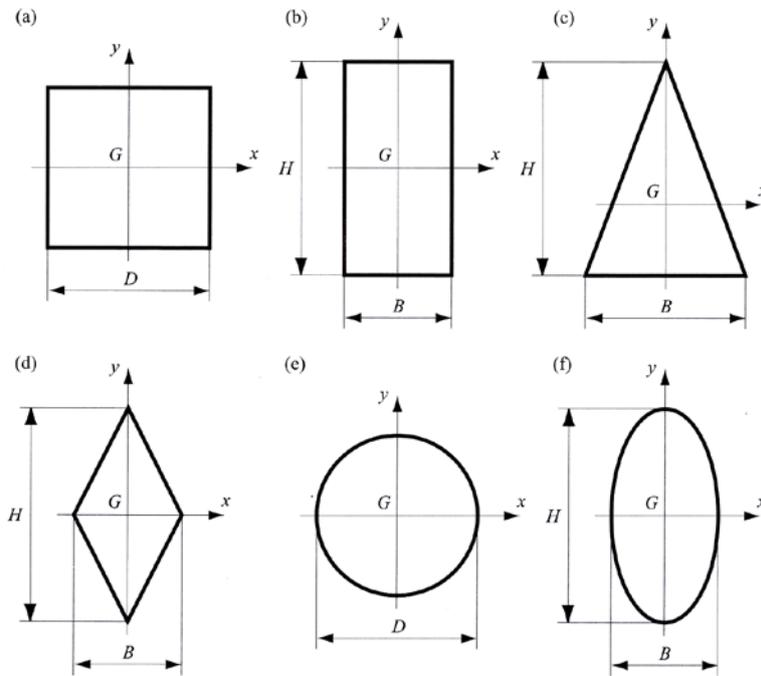
$$n = \frac{\sigma_e}{\sigma_g}$$

$$\sigma_g = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

$$\sigma_g = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Annexe 3 : Moments d'une aire plane

Forme de l'aire	I_p m ⁴	I_x m ⁴	I_y m ⁴	I_{xy} m ⁴
(a) Carré de côté D	$\frac{D^4}{6}$	$\frac{D^4}{12}$	$\frac{D^4}{12}$	0
(b) Rectangle de largeur B et hauteur H	$\frac{BH}{12}(B^2 + H^2)$	$\frac{BH^3}{12}$	$\frac{HB^3}{12}$	0
(c) Triangle isocèle de base B et hauteur H	$\frac{BH}{144}(3B^2 + 4H^2)$	$\frac{BH^3}{36}$	$\frac{HB^3}{48}$	0
(d) Losange de diamètres B et H	$\frac{BH}{48}(B^2 + H^2)$	$\frac{BH^3}{48}$	$\frac{HB^3}{48}$	0
(e) Cercle de diamètre D	$\frac{\pi D^4}{32}$	$\frac{\pi D^4}{64}$	$\frac{\pi D^4}{64}$	0
(f) Ellipse d'axes B et H	$\frac{\pi HB}{64}(B^2 + H^2)$	$\frac{\pi BH^3}{64}$	$\frac{\pi HB^3}{64}$	0



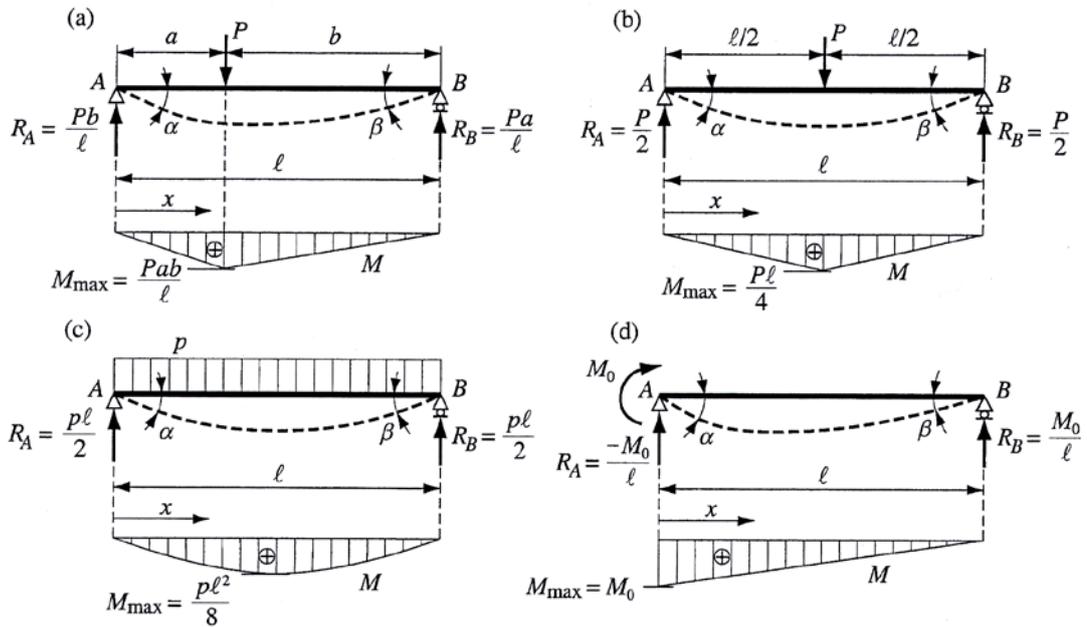
$$I_{p'} = I_p + \delta^2 F$$

$$I_{x'} = I_x + b^2 F$$

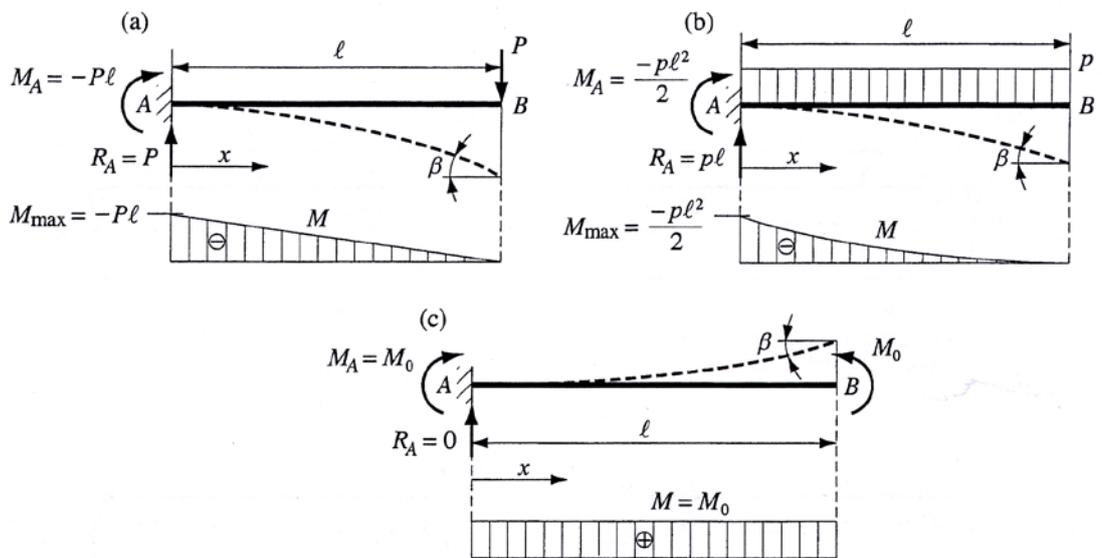
$$I_{y'} = I_y + a^2 F$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + abF$$

Annexe IV : Flèches et rotations de quelques poutres droites en flexion simple



Cas de charge	Ligne élastique $y(x)$	Flèche maximale f	Position de la flèche x	Rotations aux extrémités	
				α	β
(Ia)	$y = \frac{P}{6\ell EI} (2ab^2x + a^2bx - bx^3) \quad (0 \leq x \leq a)$ $y = \frac{P}{6\ell EI} [2a^2b(\ell-x) + ab^2(\ell-x) - a(\ell-x)^3] \quad (a \leq x \leq \ell)$	-	$a \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2b}{3a}} \quad \text{si } a > b$ $\ell - b \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2a}{3b}} \quad \text{si } a < b$	$\frac{Pab(\ell+b)}{6\ell EI}$	$-\frac{Pab(\ell+a)}{6\ell EI}$
(Ib)	$y = \frac{P}{48EI} (3\ell^2x - 4x^3) \quad (0 \leq x \leq \ell/2)$	$\frac{P\ell^3}{48EI}$	$\ell/2$	$\frac{P\ell^2}{16EI}$	$-\frac{P\ell^2}{16EI}$
(Ic)	$y = \frac{p}{24EI} (x^4 - 2\ell x^3 + \ell^3 x)$	$\frac{5p\ell^4}{384EI}$	$\ell/2$	$\frac{p\ell^3}{24EI}$	$-\frac{p\ell^3}{24EI}$
(Id)	$y = \frac{M_0}{6\ell EI} (x^3 - 3\ell x^2 + 2\ell^2 x)$	$\frac{M_0\ell^2\sqrt{3}}{27EI}$	$\ell \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{M_0\ell}{3EI}$	$-\frac{M_0\ell}{6EI}$



Cas de charge	Ligne élastique $y(x)$	Flèche maximale f	Position de la flèche x	Rotations aux extrémités	
				α	β
(IIa)	$y = \frac{P}{6EI} (3\ell x^2 - x^3)$	$\frac{P\ell^3}{3EI}$	ℓ	0	$\frac{P\ell^2}{2EI}$
(IIb)	$y = \frac{P}{24EI} (6\ell^2 x^2 - 4\ell x^3 + x^4)$	$\frac{p\ell^4}{8EI}$	ℓ	0	$\frac{p\ell^3}{6EI}$
(IIc)	$y = \frac{-M_0}{2EI} x^2$	$\frac{-M_0\ell^2}{2EI}$	ℓ	0	$\frac{-M_0\ell}{EI}$