Rappel 1er semestre

Formules trigonométriques

- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$
- $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
- $\frac{1+\cos\alpha}{2} = \cos^2(\alpha/2)$; $\frac{1-\cos\alpha}{2} = \sin^2(\alpha/2)$
- $\cos\alpha\cos\beta = 1/2(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$
- $\cos\alpha\sin\beta = 1/2(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta))$
- $\sin\alpha\sin\beta = 1/2(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

Formules d'Euler + Nombres complexes

- $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ $\quad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
- $\cosh(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ $\quad \sinh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$
- $e^{i(\pi+2k\pi)} = -1 \quad e^{i\cdot 2k\pi} = 1 \quad k \in \mathbb{Z}$
- $e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} = i \quad e^{i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)} = -i \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{i} = -i$

Intégrales/Dérivées de fonctions trigonométriques

- $\int \sin^2(ax)\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$
- $\int \cos^2(ax)\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = \mathrm{sech}^2(x)$ (valable pour tan)

Opérateurs de création et d'annihilation

- annihilation : $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}$
- création : $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}$
- $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$
- $\hat{p} = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$
- $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2) = \hbar\omega(\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1/2)$
- $\left(\hat{a}^\dagger \pm \hat{a}\right)^2 = \hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} \pm \left(2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1\right)$
- Application sur les états propres :
  - $\hat{a}^\dagger|\phi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\phi_{n+1}\rangle$
  - $\hat{a}|\phi_n\rangle = \sqrt{n}|\phi_{n-1}\rangle$
  - $\hat{a}|\phi\rangle = \langle\phi|\hat{a}^\dagger$
  - $\hat{a}|\phi_0\rangle = \langle\phi_0|\hat{a}^\dagger = 0$
  - $|\phi_n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|\phi_0\rangle$
- Commutations :
  - $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$
  - $[\hat{a}^{\dagger 2}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}^2, \hat{a}] = 0$
  - $[\hat{a}^{\dagger 2}, \hat{a}] = -2\hat{a}^\dagger$
  - $[\hat{a}^2, \hat{a}^\dagger] = 2\hat{a}$
- Opérateur $\hat{N}$
  - $\hat{N}$ est défini par $\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{N}$ tq $\hat{N}|\phi_n\rangle = n|\phi_n\rangle$
  - $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$
  - $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$

Propriétés Opérateurs

- Opérateur unitaire U : $UU^\dagger = 1$
- Opérateur unitaire et linéaire U : $\langle U\phi|U\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^*$
- Opérateur unitaire et anti-linéaire (anti-unitaire) U : $\langle U\phi|U\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle$
- Adjoint opérateur anti-unitaire : $\langle U^\dagger\psi|\phi\rangle = \langle U\phi|\psi\rangle$
- Opérateur Hermitien : $U^\dagger = U$

Spins

Matrices de Pauli

- On définit :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Les vecteurs propres des matrices sont :

$v_x^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v_y^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$; $v_y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$v_z^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $v_z^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Propriétés des matrices de Pauli :
  1. $\sigma_i^2 = Id$
  2. $Tr(\sigma_i) = 0$
  3. $det(\sigma_i) = -1$
  4. $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma_k$
  5. $\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i$
  6. $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\cdot Id + i\epsilon^{ijk}\sigma_k$
  7. Valeurs propres de toutes les matrices : ± 1
- On utilise parfois les matrices $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$ avec $i = x, y, z$
- $[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon^{ijk}S_k$
- On définit aussi :

$$\begin{cases} S^+ &= S^x + iS^y \\ S^- &= S^x - iS^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S^x &= \frac{1}{2}(S^+ + S^-) \\ S^y &= \frac{1}{2i}(S^+ - S^-) \end{cases}$$

- On peut donc écrire :

$$S^x = \begin{pmatrix} \langle\uparrow|S^x|\uparrow\rangle & \langle\uparrow|S^x|\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow|S^x|\uparrow\rangle & \langle\downarrow|S^x|\downarrow\rangle \end{pmatrix}$$

Pour calculer les valeurs de la matrice, on utilise les spins S^+ et S^-. Pour S^z, on utilise que $\langle\uparrow|S^z|\uparrow\rangle = \hbar/2$ et $\langle\downarrow|S^z|\downarrow\rangle = -\hbar/2$ si spin $1/2$.

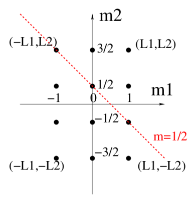
- Utilisation des S^+ et S^- :
$S^\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}|j, m\pm 1\rangle$
- Liaison des états propres de $\hat{S}_x$ et $\hat{S}_y$ avec les états propres de $\hat{S}_z$:
  - $|+_z\rangle = \frac{|+_x\rangle + |-_x\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|+_y\rangle + |-_y\rangle}{\sqrt{2}}$
  - $|-_z\rangle = \frac{|+_x\rangle - |-_x\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|+_y\rangle - |-_y\rangle}{i\sqrt{2}}$
  - $|\pm_x\rangle = \frac{|+_z\rangle \pm |-_z\rangle}{\sqrt{2}}$; $|\pm_y\rangle = \frac{|+_z\rangle \pm i|-_z\rangle}{\sqrt{2}}$

Additions de Moments cinétiques

- Valeurs propres des moments cinétiques :
$\boldsymbol{J}_i^2|j_i, m_i\rangle = \hbar^2 j_i(j_i+1)|j_i, m_i\rangle$
$J_{z,i}|j_i, m_i\rangle = \hbar m_i|j_i, m_i\rangle$
- Base de l'espace de Hilbert de $\boldsymbol{J}_1$ et $\boldsymbol{J}_2$:
$|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$.
- les valeurs du moment cinétique total J, que l'on peut obtenir en faisant l'addition de J_1 et J_2 sont données par :
$|J_1 - J_2| \leq J \leq J_1 + J_2$
- m est compris entre $-J$ et J.

Addition de Moments cinétiques et coeff de Clebsch-Gordan

- On a la base $\mathcal{B}_1 = \{|J_1, m_1\rangle \otimes |J_2, m_2\rangle\} \equiv \{|m_1\rangle|m_2\rangle\}$ et la base $\mathcal{B}_2 = \{|J_1, J_2, j, m\rangle\} \equiv \{|j, m\rangle\}$
- Le but est de mettre en relation $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
- Méthodologie :
  - On classe les m_1 et les m_2 de cette manière :



- Ici, $J_1 = 1$ et $J_2 = 3/2$.
- On commence par le m maximum. Ici, $m = 5/2$.
- Il n'y a qu'une seule possibilité d'obtenir $|j, m\rangle = |m_1\rangle|m_2\rangle$.
- On prend le second m maximum, noté m^*. On aura alors 2 combinaisons de $|m_1^{a,b}\rangle|m_2^{a,b}\rangle$ tel que $|j, m^*\rangle = |m_1^{a,b}\rangle|m_2^{a,b}\rangle$. On a donc : $|j, m^*\rangle = \alpha|m_1^a, m_2^a\rangle + \beta|m_1^b, m_2^b\rangle$. Les coefficients α et β sont les **coefficients de Clebsch-Gordan**. On les trouve en utilisant l'opérateur J^-.
- On reprend ce qu'on a trouvé à la première étape : $|j, m\rangle = |m_1\rangle|m_2\rangle$ pour le m maximum. Et on applique J^- :
$J^-|j, m\rangle = (J_1^- + J_2^-)|m_1\rangle|m_2\rangle$ avec
$J^-|j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|j, m-1\rangle$
et
$J_1^-|m_1\rangle|m_2\rangle = (J_1^-|m_1\rangle)|m_2\rangle =$
$\hbar\sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)}|m_1 - 1\rangle|m_2\rangle$
- On reproduit cette étape pour les m suivants jusqu'à celui qui est **minimal et positif**.
- Pour trouver les valeurs des coefficients de Clebsch-Gordan des valeurs de m négatives, on reprends les mêmes valeurs que pour m positifs, mais on met le signe de $(-1)^{j_1+j_2-j}$ devant. (i.e. si $j_1 + j_2 - j$ est pair, on ne change pas le signe des coeff. de C-G, sinon on change le signe)
- Si maintenant, on refait la même chose qu'avant sauf qu'on prend $j - 1$ au lieu j, on doit faire ceci :
  - Prendre $m = j - 1$, exprimer $|j-1, m\rangle = \gamma|m_1^a, m_2^a\rangle + \delta|m_1^b, m_2^b\rangle$ avec les m_1, m_2 trouvés précédemment, α et β sont connus maintenant.
  - Ecrire que $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$ (Produit scalaire nul)
  - Utiliser le fait que $|\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$
  - On trouve donc les coefficients γ et δ.

Symétries

Introduction

- Une opération de symétrie est une transformation d'une quantité qui ne change pas certaines propriétés.
- En mécanique quantique, l'opérateur de symétrie U est unitaire $(U^\dagger = U^{-1})$
  - il y a deux façon de le décrire :

$$\begin{cases} A \to U^\dagger AU & \text{: point de vue passif} \\ |\Psi\rangle \text{ inchangé} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\Psi\rangle \to U|\Psi\rangle & \text{: point de vue actif} \\ A \text{ inchangé} \end{cases}$$

- Thm Wigner : Plus généralement, L'opérateur de symétrie K est unitaire ou anti-unitaire. Il doit satisfaire :
  - K est anti-linéaire :
  $K(|\Psi\rangle + |\Phi\rangle) = K|\Psi\rangle + K|\Phi\rangle$
  $K(c|\Psi\rangle) = c^* K(|\Psi\rangle)$
  - $\langle K\Psi|K\Phi\rangle = \langle\Psi|\Phi\rangle^* = \langle\Phi|\Psi\rangle$
- Il n'y a que l'opérateur renversement du temps qui est anti-unitaire.

Symétries fondamentales

- Transformations d'espace :
  - Translations : $T^\dagger(a)\hat{x}T(a) = \hat{x} + a$
  L'opérateur $\hat{\boldsymbol{p}}$ est le générateur de translation. On écrit donc : $T(\boldsymbol{a}) = \exp\left(-i\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}/\hbar\right)$
  - Rotations : $R^\dagger(\boldsymbol{\alpha})\hat{\boldsymbol{r}}R(\boldsymbol{\alpha}) = R_{\boldsymbol{\alpha}}(\hat{\boldsymbol{r}})$
  L'opérateur $\hat{L}$ est le générateur de rotation. On écrit donc : $R(\boldsymbol{\alpha}) = \exp\left(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}/\hbar\right)$
  - Parité : $\Pi|\boldsymbol{r}\rangle = |-\boldsymbol{r}\rangle$
  Les vecteurs qui changent de signe ($\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{p}$,...) sont appelés vecteurs polaires. Les vecteurs qui ne changent pas de signe ($\boldsymbol{L}$,...) sont appelés vecteurs axiaux.
- Renversement du temps :

$$\begin{cases} \theta^{-1}\hat{\boldsymbol{r}}\theta = \hat{\boldsymbol{r}} \\ \theta^{-1}\hat{\boldsymbol{p}}\theta = -\hat{\boldsymbol{p}} \end{cases} \Rightarrow \theta|\Psi\rangle = |\Psi^*\rangle$$

Méthode d'approximation : Problèmes indépendant du temps

Approche variationnelle

- Principe variationnel :

$$(\forall|\Psi\rangle)\ \frac{\langle\Psi|H|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle} \geq E_0 \text{ où } E_0 \text{ est l'énergie du fondamental}$$

Théorie des perturbations non dégénérées

- On suppose l'hamiltonien de la forme : $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$
H_0 est l'hamiltonien habituel et $\hat{V}$ est une perturbation.
Généralement, on considère une petite perturbation : $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{V}$ avec λ petit.
- On doit donc écrire :
$|\Psi\rangle = |\phi_n\rangle + \lambda|\Psi_n^{(1)}\rangle + \lambda^2|\Psi_n^{(2)}\rangle + \ldots$
$E_n = \varepsilon_n + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \ldots$
- Ordre 0 :
  - $H_0|\phi_n\rangle = \varepsilon_n|\phi_n\rangle$
- Ordre 1 :
  - $H_0|\Psi_n^(1)\rangle + \hat{V}|\phi_n\rangle = \varepsilon_n|\Psi_n^{(1)}\rangle + E_n^{(1)}|\phi_n\rangle$
- Ordre ≥ 2 - Théorie Rayleigh-Schrödinger/Brioullin-Wigner :
  - L'énergie est donnée par :

$$E_n = \varepsilon_n + \lambda\langle\phi_n|\hat{V}|\phi_n\rangle + \lambda^2\sum_{m\neq n}\frac{|\langle\phi_m|\hat{V}|\phi_n\rangle|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_m}$$

  - Les vecteurs propres sont donnés par (ordre 1) :

$$|\Psi_n\rangle = |\phi_n\rangle + \lambda\sum_{m\neq n}\frac{\langle\phi_m|\hat{V}|\phi_n\rangle}{\varepsilon_n - \varepsilon_m}|\phi_m\rangle$$

Théorie des perturbations dégénérées

- On suppose qu'un niveau ε_n de H_0 est dégénéré. ϕ_i, $i = 1, \ldots, k$ sont les fonctions propres de H_0 d'énergie ε_n. On doit donc chercher des états propres du type :
$|\Psi_n\rangle = \sum_j\langle\phi_{n_j}|\Psi_n\rangle|\psi_{n_j}\rangle + \sum_{m\neq j}\langle\phi_m|\Psi_n\rangle|\phi_m\rangle$
- Calcul au premier ordre :
  - On doit créer la matrice de perturbations sur la restriction du sous-espace dégénéré, i.e. :
  $M_{ij}^{(1)} = \lambda\langle\phi_{n_i}|\hat{V}|\phi_{n_j}\rangle$
  - Les valeurs propres de la matrice $M^{(1)}$ donne la correction à l'ordre 1 de l'énergie. Les vecteurs propres de la matrice $M^{(1)}$ sont les vecteurs propres cherchés.
- Calcul au deuxième ordre :
  - On calcule une nouvelle matrice pour le deuxième ordre :
  $M_{ij}^{(2)} = M_{ij}^{(1)} + \lambda^2\sum_{m\neq n_i}\frac{\langle\phi_{n_i}|\hat{V}|\phi_m\rangle\langle\phi_m|\hat{V}|\phi_{n_j}\rangle}{\varepsilon_n - \varepsilon_m}$
  - Les valeurs propres de la matrice $M^{(2)}$ donne la correction à l'ordre 1 de l'énergie. Les vecteurs propres de la matrice $M^{(2)}$ sont les corrections des vecteurs propres.
  - Suite au fait d'avoir trouver les vecteurs propres, on a la correction à l'ordre 0 poru les vecteurs propres. Il faut donc calculer la correction à l'ordre 1. Pour cela, on utilise :
  $\langle\phi_m|\Psi_{n,i}\rangle = \lambda\sum_j\frac{\langle\phi_{n_j}|\Psi_{n,i}\rangle\langle\phi_m|\hat{V}|\phi_{n_j}\rangle}{\varepsilon_n - \varepsilon_m}$

Méthode d'approximation : Problèmes dépendant du temps

Opérateur d'évolution

- Utilisation de l'opérateur d'évolution temporelle :
  - Hamiltonien de la forme : $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$
  - Au premier ordre, on a :
    - $\hat{U}_I(t, t_0) = \mathbf{1} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t \mathrm{d}t_1\hat{V}_I(t_1)$
    - $\langle n|\hat{U}_I(t, t_0)|i\rangle = -\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t \mathrm{d}t_1\langle n|\hat{V}_I(t_1)|i\rangle$
    - Mais on a : $\hat{V}_I(t_1) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0(t_1 - t_0)}\hat{V}(t_1)e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0(t_1 - t_0)}$
    - Ainsi : $\langle n|\hat{U}_I(t, t_0)|i\rangle =$
    $-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t \mathrm{d}t_1 e^{i(E_n - E_i)(t_1 - t_0)/\hbar}\langle n|\hat{V}(t_1)|i\rangle$
- Probabilité de transition de $|i\rangle \to |n\rangle$:

$$P_{i\to n} = \left|-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t \mathrm{d}t_1 e^{i(E_n - E_i)(t_1 - t_0)/\hbar}\langle n|\hat{V}(t_1)|i\rangle\right|^2$$

- On utilise souvent la petite astuce suivante :

$$\begin{aligned}|1-e^{ix}|^2 &= (1-e^{ix})(1-e^{ix}) \\ &= (e^{-ix/2}-e^{ix/2})(e^{ix/2}-e^{-ix/2}) \\ &= -2i\sin(x/2)2i\sin(x/2) = 4\sin^2(x/2)\end{aligned}$$

- Règle d'or de Fermi :

$w_{i\to n} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle n|\hat{V}|i\rangle\right|^2 \delta(E_n - E_i)$

Matrices densite

Introduction du formalisme

- Etat pur :
  - $|\Psi\rangle$ est un etat pur si $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$
  - $\hat{O}$ un observable : $\langle\hat{O}\rangle = \text{Tr}(\hat{O}\hat{\rho})$
- 2 sous-systemes A et B de bases $\{|j\rangle\}$ et $\{|\mu\rangle\}$:
  - $|\Psi\rangle$ est un etat pur si $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$
  - $\hat{O}$ une observable de A, sa valeur moyenne est : $\langle\hat{O}\otimes\hat{I}_B\rangle = \text{Tr}(\hat{O}\hat{\rho}) = \sum_{i,j}\rho_{ij}M_{ij}$ avec $\rho_{ij} = \sum_\mu \langle i\mu|\psi\rangle\langle\psi|j\mu\rangle$
  - Trace partielle : $\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B(\hat{\rho}) = \sum_j \langle j|\hat{\rho}|j\rangle$ avec $\{|j\rangle\}$ base de B ou encore $\hat{\rho}_A = \sum_\mu\sum_{i,j}\alpha_{i\mu}\alpha^*_{j\mu}|i\rangle\langle j|$

Proprietes

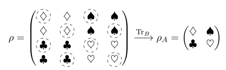
- Trace :
  - $\hat{\rho}^\dagger_A = \hat{\rho}_A$ (on peut diagonaliser)
  - $\text{Tr}(\hat{\rho}_A) = 1$
  - $\hat{\rho}_A$ definie positive : $\langle\phi|\hat{\rho}_A|\phi\rangle > 0$
- Etat pur : $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ donc Tr $\left(\hat{\rho}^2\right) = \text{Tr}\left(\hat{\rho}\right) = 1$
- Etat "de melange statistique" : $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ donc Tr $\left(\hat{\rho}^2\right) < \text{Tr}\left(\hat{\rho}\right)$

Evolution temporelle

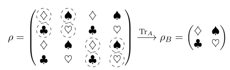
- $i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = -[\hat{\rho},\hat{H}]$

Trace partielle

- Supposons qu'il y a 2 sous-systèmes A et B tq $|\psi\rangle = |\phi_A\rangle\otimes|\phi_B\rangle$.
- Matrice densité : $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \ldots = (|\phi_A\rangle\langle\phi_A|)\otimes|\phi_B\rangle\langle\phi_B|) \Rightarrow \hat{\rho} = \hat{\rho}_A\otimes\hat{\rho}_B$
- On définit : $\hat{\rho}_A = Tr_B(\hat{\rho})$ et $\hat{\rho}_B = Tr_A(\hat{\rho})$
- Afin de calculer plus simplement, on utilise la base suivante : $\{|0_A0_B\rangle, |0_A1_B\rangle, |1_A0_B\rangle, |1_A1_B\rangle\}$
- On peut réécrire la trace partielle pour trouver $\hat{\rho}_A$: $\hat{\rho}_A = Tr_B(\rho) = \sum_{j=0,1}\langle j_B|\hat{\rho}|j_B\rangle = \langle 0_B|\hat{\rho}|0_B\rangle + \langle 1_B|\hat{\rho}|1_B\rangle$
- En image, cela donne :
  - $\hat{\rho}_A$:



  - $\hat{\rho}_B$:



  - Il faut sommer les éléments entourés en pointillés et les placé à l'endroit correspondant de la petite matrice.

Etats intriqués

- Deux objets quantiques sont intriqués s'il doit être décrit globalement. On ne peut donc pas les séparer. Si on a deux systèmes S_1 et S_2. On peut les séparer de manière spatiale, *i.e.* ils peuvent être à une grande distance. Mais on doit considérer le système $\{S_1+S_2\}$ comme un système unique.
- Exemples simples :
  - $|\Psi_{1+2}\rangle = |\psi_1\rangle\otimes|\psi_2\rangle$: Etat séparable (non-intriqué)
  - $|\Psi_{1+2}\rangle = a|\phi_1\rangle|\phi_2\rangle + b|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle + \ldots$: Etat intriqué
- En utilisant les bases $\{|+\rangle_i, |-\rangle_i\}$, $i = 1, 2$:
  - $|\Psi_{sep}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|-\rangle_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1 - |-\rangle_1\right)\otimes|-\rangle_2$
  - $|\Psi_{int}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2\right)$