

Rappel 1^{er} semestre

Formules trigonométriques

- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$
- $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
- $\frac{1+\cos \alpha}{2} = \cos^2(\alpha/2)$; $\frac{1-\cos \alpha}{2} = \sin^2(\alpha/2)$
- $\cos \alpha \cos \beta = 1/2(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$
- $\cos \alpha \sin \beta = 1/2(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$
- $\sin \alpha \sin \beta = 1/2(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$

Formules d'Euler + Nombres complexes

- $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
- $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $e^{i(\pi + 2k\pi)} = -1$ $e^{i \cdot 2k\pi} = 1$ $k \in \mathbb{Z}$
- $e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = i$ $e^{i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = -i$ $k \in \mathbb{Z}$
- $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{i} = -i$

Intégrales/Dérivées de fonctions trigonométriques

- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a}$
- $\frac{d}{dx} \tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = \operatorname{sech}^2(x)$ (valable pour tan)

Opérateurs de création et d'annihilation

- annihilation : $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + i \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \hat{p}$
- création : $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - i \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \hat{p}$
- $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a})$
- $\hat{p} = i \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a})$
- $\hat{H} = \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2) = \hbar\omega (\hat{a} \hat{a}^\dagger - 1/2)$
- $(\hat{a}^\dagger \pm \hat{a})^2 = \hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} \pm (2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1)$
- Application sur les états propres :
 - $\hat{a}^\dagger |\phi_n\rangle = \sqrt{n+1} |\phi_{n+1}\rangle$
 - $\hat{a} |\phi_n\rangle = \sqrt{n} |\phi_{n-1}\rangle$
 - $\hat{a} |\phi\rangle = \langle \phi | \hat{a}^\dagger$
 - $\hat{a} |\phi_0\rangle = \langle \phi_0 | \hat{a}^\dagger = 0$
 - $|\phi_n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |\phi_0\rangle$
- Commutations :
 - $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$
 - $[\hat{a}^{\dagger 2}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}^2, \hat{a}] = 0$
 - $[\hat{a}^{\dagger 2}, \hat{a}] = -2\hat{a}^\dagger$
 - $[\hat{a}^2, \hat{a}^\dagger] = 2\hat{a}$
- Opérateur \hat{N}
 - \hat{N} est défini par $\hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{N}$ tq $\hat{N} |\phi_n\rangle = n |\phi_n\rangle$
 - $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$
 - $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$

Propriétés Opérateurs

- Opérateur unitaire $U : UU^\dagger = 1$
- Opérateur unitaire et linéaire $U : \langle U\phi | U\psi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle^*$
- Opérateur unitaire et anti-linéaire (anti-unitaire) $U : \langle U\phi | U\psi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle$
- Adjoint opérateur anti-unitaire : $\langle U^\dagger \psi | \phi \rangle = \langle U\phi | \psi \rangle$
- Opérateur Hermitien : $U^\dagger = U$

Spins

Matrices de Pauli

- On définit : $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres des matrices sont :

$$v_x^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; v_x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_y^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}; v_y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$v_z^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; v_z^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Propriétés des matrices de Pauli :

- $\sigma_i^2 = Id$
- $Tr(\sigma_i) = 0$
- $\det(\sigma_i) = -1$
- $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon^{ijk} \sigma_k$
- $\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i$
- $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \cdot Id + i\epsilon^{ijk} \sigma_k$
- Valeurs propres de toutes les matrices : ± 1

On utilise parfois les matrices $S_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$ avec $i = x, y, z$

- $[S_i, S_j] = i\hbar \epsilon^{ijk} S_k$
- On définit aussi : $\begin{cases} S^+ = S^x + iS^y \\ S^- = S^x - iS^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S^x = \frac{1}{2}(S^+ + S^-) \\ S^y = \frac{1}{2i}(S^+ - S^-) \end{cases}$
- On peut donc écrire : $S^x = \begin{pmatrix} \langle \uparrow | S^x | \uparrow \rangle & \langle \uparrow | S^x | \downarrow \rangle \\ \langle \downarrow | S^x | \uparrow \rangle & \langle \downarrow | S^x | \downarrow \rangle \end{pmatrix}$

Pour calculer les valeurs de la matrice, on utilise les spins S^+ et S^- . Pour S^z , on utilise que $\langle \uparrow | S^z | \uparrow \rangle = \hbar/2$ et $\langle \downarrow | S^z | \downarrow \rangle = -\hbar/2$ si spin 1/2.

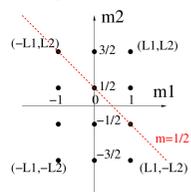
- Utilisation des S^+ et S^- : $S^\pm |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle$
- Liaison des états propres de \hat{S}_x et \hat{S}_y avec les états propres de \hat{S}_z :
 - $|+z\rangle = \frac{|+x\rangle + |-x\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|+y\rangle + |-y\rangle}{\sqrt{2}}$
 - $|-z\rangle = \frac{|+x\rangle - |-x\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|+y\rangle - |-y\rangle}{i\sqrt{2}}$
 - $|\pm x\rangle = \frac{|+z\rangle \pm |-z\rangle}{\sqrt{2}} \quad ; \quad |\pm y\rangle = \frac{|+z\rangle \pm i|-z\rangle}{\sqrt{2}}$

Additions de Moments cinétiques

- Valeurs propres des moments cinétiques : $J_i^2 |j_i, m_i\rangle = \hbar^2 j_i(j_i + 1) |j_i, m_i\rangle$
 $J_{z,i} |j_i, m_i\rangle = \hbar m_i |j_i, m_i\rangle$
- Base de l'espace de Hilbert de J_1 et J_2 : $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$.
- les valeurs du moment cinétique total J , que l'on peut obtenir en faisant l'addition de J_1 et J_2 sont données par : $|J_1 - J_2| \leq J \leq J_1 + J_2$
- m est compris entre $-J$ et J .

Addition de Moments cinétiques et coeff de Clebsch-Gordan

- On a la base $\mathcal{B}_1 = \{|J_1, m_1\rangle \otimes |J_2, m_2\rangle\} \equiv \{|m_1\rangle |m_2\rangle\}$ et la base $\mathcal{B}_2 = \{|J_1, J_2, j, m\rangle\} \equiv \{|j, m\rangle\}$
- Le but est de mettre en relation \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 .
- Méthodologie :
 - On classe les m_1 et les m_2 de cette manière :



- Ici, $J_1 = 1$ et $J_2 = 3/2$.
- On commence par le m maximum. Ici, $m = 5/2$.
- Il n'y a qu'une seule possibilité d'obtenir $|j, m\rangle = |m_1\rangle |m_2\rangle$.
- On prend le second m maximum, noté m^* . On aura alors 2 combinaisons de $|m_1^{a,b}\rangle |m_2^{a,b}\rangle$ tel que $|j, m^*\rangle = |m_1^{a,b}\rangle |m_2^{a,b}\rangle$. On a donc : $|j, m^*\rangle = \alpha |m_1^a, m_2^a\rangle + \beta |m_1^b, m_2^b\rangle$. Les coefficients α et β sont les **coefficients de Clebsch-Gordan**. On les trouve en utilisant l'opérateur J^- .
- On reprend ce qu'on a trouvé à la première étape : $|j, m\rangle = |m_1\rangle |m_2\rangle$ pour le m maximum. Et on applique J^- : $J^- |j, m\rangle = (J_1^- + J_2^-) |m_1\rangle |m_2\rangle$ avec $J^- |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle$ et $J_1^- |m_1\rangle |m_2\rangle = (J_1^- |m_1\rangle) |m_2\rangle = \hbar \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)} |m_1-1\rangle |m_2\rangle$
- On reproduit cette étape pour les m suivants jusqu'à celui qui est **minimal et positif**.
- Pour trouver les valeurs des coefficients de Clebsch-Gordan des valeurs de m négatives, on reprends les mêmes valeurs que pour m positifs, mais on met le signe de $(-1)^{j_1+j_2-j}$ devant. (i.e. si $j_1 + j_2 - j$ est pair, on ne change pas le signe des coeff. de C-G, sinon on change le signe)
- Si maintenant, on refait la même chose qu'avant sauf qu'on prend $j-1$ au lieu j , on doit faire ceci :
 - Prendre $m = j-1$, exprimer $|j-1, m\rangle = \gamma |m_1^a, m_2^a\rangle + \delta |m_1^b, m_2^b\rangle$ avec les m_1, m_2 trouvés précédemment, α et β sont connus maintenant.
 - Ecrire que $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$ (Produit scalaire nul)
 - Utiliser le fait que $|\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$
 - On trouve donc les coefficients γ et δ .

Symétries

Introduction

- Une opération de symétrie est une transformation d'une quantité qui ne change pas certaines propriétés.
- En mécanique quantique, l'opérateur de symétrie U est unitaire ($U^\dagger = U^{-1}$)
 - il y a deux façon de le décrire :
 - $\begin{cases} A \rightarrow U^\dagger A U : \text{point de vue passif} \\ |\Psi\rangle \text{ inchangé} \end{cases}$
 - $\begin{cases} |\Psi\rangle \rightarrow U |\Psi\rangle : \text{point de vue actif} \\ A \text{ inchangé} \end{cases}$
- Thm Wigner : Plus généralement, L'opérateur de symétrie K est unitaire ou anti-unitaire. Il doit satisfaire :
 - K est anti-linéaire : $K(|\Psi\rangle + |\Phi\rangle) = K|\Psi\rangle + K|\Phi\rangle$
 - $K(c|\Psi\rangle) = c^* K(|\Psi\rangle)$
 - $\langle K\Psi | K\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle^* = \langle \Phi | \Psi \rangle$
- Il n'y a que l'opérateur renversement du temps qui est anti-unitaire.

Symétries fondamentales

- Transformations d'espace :
 - Translations : $T^\dagger(a) \hat{x} T(a) = \hat{x} + a$
L'opérateur \hat{p} est le générateur de translation. On écrit donc : $T(a) = \exp(-ia \cdot \mathbf{p}/\hbar)$
 - Rotations : $R^\dagger(\alpha) \hat{r} R(\alpha) = R_\alpha(\hat{r})$
L'opérateur \hat{L} est le générateur de rotation. On écrit donc : $R(\alpha) = \exp(-i\alpha \cdot \hat{L}/\hbar)$
 - Parité : $\Pi|\mathbf{r}\rangle = |-\mathbf{r}\rangle$
Les vecteurs qui changent de signe ($\mathbf{r}, \mathbf{p}, \dots$) sont appelés vecteurs polaires. Les vecteurs qui ne changent pas de signe (\mathbf{L}, \dots) sont appelés vecteurs axiaux.
- Renversement du temps :
 - $\begin{cases} \theta^{-1} \hat{r} \theta = \hat{r} \\ \theta^{-1} \hat{p} \theta = -\hat{p} \end{cases} \Rightarrow \theta |\Psi\rangle = |\Psi^*\rangle$

Méthode d'approximation : Problèmes indépendant du temps

Approche variationnelle

Principe variationnel :

$$\langle \Psi | \Psi \rangle \frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \geq E_0 \text{ où } E_0 \text{ est l'énergie du fondamental}$$

Théorie des perturbations non dégénérées

- On suppose l'hamiltonien de la forme : $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$
 H_0 est l'hamiltonien habituel et \hat{V} est une perturbation. Généralement, on considère une petite perturbation : $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{V}$ avec λ petit.
- On doit donc écrire : $|\Psi\rangle = |\phi_n\rangle + \lambda |\Psi_n^{(1)}\rangle + \lambda^2 |\Psi_n^{(2)}\rangle + \dots$
 $E_n = \varepsilon_n + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots$
- Ordre 0 :
 - $H_0 |\phi_n\rangle = \varepsilon_n |\phi_n\rangle$
- Ordre 1 :
 - $H_0 |\Psi_n^{(1)}\rangle + \hat{V} |\phi_n\rangle = \varepsilon_n |\Psi_n^{(1)}\rangle + E_n^{(1)} |\phi_n\rangle$
- Ordre ≥ 2 - Théorie Rayleigh-Schrödinger/Brioullin-Wigner :
 - L'énergie est donnée par :
$$E_n = \varepsilon_n + \lambda \langle \phi_n | \hat{V} | \phi_n \rangle + \lambda^2 \sum_{m \neq n} \frac{\langle \phi_m | \hat{V} | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \hat{V} | \phi_m \rangle}{\varepsilon_n - \varepsilon_m}$$
- Les vecteurs propres sont donnés par (ordre 1) :
$$|\Psi_n\rangle = |\phi_n\rangle + \lambda \sum_{m \neq n} \frac{\langle \phi_m | \hat{V} | \phi_n \rangle}{\varepsilon_n - \varepsilon_m} |\phi_m\rangle$$

Théorie des perturbations dégénérées

- On suppose qu'un niveau ε_n de H_0 est dégénéré. $\phi_i, i = 1, \dots, k$ sont les fonctions propres de H_0 d'énergie ε_n . On doit donc chercher des états propres du type : $|\Psi_n\rangle = \sum_j \langle \phi_{n,j} | \Psi_n \rangle |\psi_{n,j}\rangle + \sum_{m \neq j} \langle \phi_m | \Psi_n \rangle |\phi_m\rangle$
- Calcul au premier ordre :
 - On doit créer la matrice de perturbations sur la restriction du sous-espace dégénéré, i.e. : $M_{ij}^{(1)} = \lambda \langle \phi_{n,i} | \hat{V} | \phi_{n,j} \rangle$
 - Les valeurs propres de la matrice $M^{(1)}$ donne la correction à l'ordre 1 de l'énergie. Les vecteurs propres de la matrice $M^{(1)}$ sont les vecteurs propres cherchés.
- Calcul au deuxième ordre :
 - On calcule une nouvelle matrice pour le deuxième ordre :
$$M_{ij}^{(2)} = M_{ij}^{(1)} + \lambda^2 \sum_{m \neq n, i} \frac{\langle \phi_{n,i} | \hat{V} | \phi_m \rangle \langle \phi_m | \hat{V} | \phi_{n,j} \rangle}{\varepsilon_n - \varepsilon_m}$$
 - Les valeurs propres de la matrice $M^{(2)}$ donne la correction à l'ordre 1 de l'énergie. Les vecteurs propres de la matrice $M^{(2)}$ sont les corrections des vecteurs propres.
 - Suite au fait d'avoir trouver les vecteurs propres, on a la correction à l'ordre 0 pour les vecteurs propres. Il faut donc calculer la correction à l'ordre 1. Pour cela, on utilise :
$$\langle \phi_m | \Psi_{n,i} \rangle = \lambda \sum_j \frac{\langle \phi_{n,j} | \Psi_{n,i} \rangle \langle \phi_m | \hat{V} | \phi_{n,j} \rangle}{\varepsilon_n - \varepsilon_m}$$

Méthode d'approximation : Problèmes dépendant du temps

Opérateur d'évolution

- Utilisation de l'opérateur d'évolution temporelle :
 - Hamiltonien de la forme : $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$
 - Au premier ordre, on a :
 - $\hat{U}_I(t, t_0) = \mathbf{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \hat{V}_I(t_1)$
 - $\langle n | \hat{U}_I(t, t_0) | i \rangle = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \langle n | \hat{V}_I(t_1) | i \rangle$
 - Mais on a : $\hat{V}_I(t_1) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t_1 - t_0)} \hat{V}(t_1) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t_1 - t_0)}$
 - Ainsi : $\langle n | \hat{U}_I(t, t_0) | i \rangle = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 e^{i(E_n - E_i)(t_1 - t_0)/\hbar} \langle n | \hat{V}(t_1) | i \rangle$
- Probabilité de transition de $|i\rangle \rightarrow |n\rangle$:
$$P_{i \rightarrow n} = \left| -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 e^{i(E_n - E_i)(t_1 - t_0)/\hbar} \langle n | \hat{V}(t_1) | i \rangle \right|^2$$

- On utilise souvent la petite astuce suivante :

$$\begin{aligned}
 |1 - e^{ix}|^2 &= (1 - e^{ix})(1 - e^{-ix}) \\
 &= (e^{-ix/2} - e^{ix/2})(e^{ix/2} - e^{-ix/2}) \\
 &= -2i \sin(x/2) 2i \sin(x/2) = 4 \sin^2(x/2)
 \end{aligned}$$

Règle d'or de Fermi :

$$w_{i \rightarrow n} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle n | \hat{V} | i \rangle \right|^2 \delta(E_n - E_i)$$

Matrices densite

Introduction du formalisme

- Etat pur :
 - $|\Psi\rangle$ est un etat pur si $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$
 - \hat{O} un observable : $\langle\hat{O}\rangle = \text{Tr}(\hat{O}\hat{\rho})$
- 2 sous-systemes A et B de bases $\{|j\rangle\}$ et $\{|\mu\rangle\}$:
 - $|\Psi\rangle$ est un etat pur si $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$
 - \hat{O} une observable de A, sa valeur moyenne est : $\langle\hat{O} \otimes \hat{I}_B\rangle = \text{Tr}(\hat{O}\hat{\rho}) = \sum_{i,j} \rho_{ij} M_{ij}$ avec $\rho_{ij} = \sum_{\mu} \langle i\mu | \psi \rangle \langle \psi | j\mu \rangle$
 - Trace partielle : $\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B(\hat{\rho}) = \sum_j \langle j | \hat{\rho} | j \rangle$ avec $\{|j\rangle\}$ base de B ou encore $\hat{\rho}_A = \sum_{\mu} \sum_{i,j} \alpha_{i\mu} \alpha_{j\mu}^* |i\rangle\langle j|$

Proprietes

- Trace :
 - $\hat{\rho}_A^\dagger = \hat{\rho}_A$ (on peut diagonaliser)
 - $\text{Tr}(\hat{\rho}_A) = 1$
 - $\hat{\rho}_A$ definie positive : $\langle\phi|\hat{\rho}_A|\phi\rangle > 0$
- Etat pur : $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ donc $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = \text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$
- Etat "de melange statistique" : $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ donc $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) < \text{Tr}(\hat{\rho})$

Evolution temporelle

$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -[\hat{\rho}, \hat{H}]$

Trace partielle

- Supposons qu'il y a 2 sous-systèmes A et B tq $|\psi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$.
- Matrice densité : $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \dots = (|\phi_A\rangle\langle\phi_A|) \otimes (|\phi_B\rangle\langle\phi_B|) \Rightarrow \hat{\rho} = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$
- On définit : $\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B(\hat{\rho})$ et $\hat{\rho}_B = \text{Tr}_A(\hat{\rho})$
- Afin de calculer plus simplement, on utilise la base suivante : $\{|0_A 0_B\rangle, |0_A 1_B\rangle, |1_A 0_B\rangle, |1_A 1_B\rangle\}$
- On peut réécrire la trace partielle pour trouver $\hat{\rho}_A$: $\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B(\hat{\rho}) = \sum_{j=0,1} \langle j_B | \hat{\rho} | j_B \rangle = \langle 0_B | \hat{\rho} | 0_B \rangle + \langle 1_B | \hat{\rho} | 1_B \rangle$
- En image, cela donne :

$\hat{\rho}_A$:

$$\rho = \begin{pmatrix} \diamond & \diamond & \blacktriangle & \blacktriangle \\ \diamond & \diamond & \blacktriangle & \blacktriangle \\ \blacktriangle & \blacktriangle & \heartsuit & \heartsuit \\ \blacktriangle & \blacktriangle & \heartsuit & \heartsuit \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Tr}_B} \rho_A = \begin{pmatrix} \diamond & \blacktriangle \\ \blacktriangle & \heartsuit \end{pmatrix}$$

$\hat{\rho}_B$:

$$\rho = \begin{pmatrix} \diamond & \blacktriangle & \diamond & \blacktriangle \\ \blacktriangle & \heartsuit & \blacktriangle & \heartsuit \\ \diamond & \blacktriangle & \diamond & \blacktriangle \\ \blacktriangle & \heartsuit & \blacktriangle & \heartsuit \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Tr}_A} \rho_B = \begin{pmatrix} \diamond & \blacktriangle \\ \blacktriangle & \heartsuit \end{pmatrix}$$

- Il faut sommer les éléments entourés en pointillés et les placé à l'endroit correspondant de la petite matrice.

Etats intriqués

- Deux objets quantiques sont intriqués s'il doit être décrit globalement. On ne peut donc pas les séparer. Si on a deux systèmes S_1 et S_2 . On peut les séparer de manière spatiale, *i.e.* ils peuvent être à une grande distance. Mais on doit considérer le système $\{S_1 + S_2\}$ comme un système unique.
- Exemples simples :
 - $|\Psi_{1+2}\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$: Etat séparable (non-intriqué)
 - $|\Psi_{1+2}\rangle = a|\phi_1\rangle|\phi_2\rangle + b|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle + \dots$: Etat intriqué
- En utilisant les bases $\{|+\rangle_i, |-\rangle_i\}$, $i = 1, 2$:
 - $|\Psi_{sep}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 - |-\rangle_1) \otimes |-\rangle_2$
 - $|\Psi_{int}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2)$