Mécanique Quantique I, Corrigé du partiel du 4.11.2014

Exercice 1 : Evolution temporelle d'un oscillateur harmonique

1. (a) L'évolution temporelle de $|\Psi_1(t=0)\rangle$ est régie par l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi_1(t)\rangle = H|\Psi_1(t)\rangle \tag{1}$$

Comme le hamiltonien est indépendant du temps, la solution de cette équation est donnée par

$$|\Psi_1(t)\rangle = e^{-iHt}|\Psi_1(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{-i\omega t/2}|0\rangle + e^{-i7\omega t/2}|3\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t/2}[|0\rangle + e^{-i3\omega t}|3\rangle] \tag{2}$$

(b) On en déduit que l'évolution temporelle du système est périodique. La phase globale $e^{-i\omega t/2}$ qui multiplie les termes entre crochets n'a aucune influence sur la physique de l'évolution du système. La période de l'état physique est alors donnée par celle du terme entre crochets et vaut donc $T_1 = \frac{2\pi}{3\omega}$

2. (a) De même que pour la partie 1.(a), l'évolution temporelle de $|\Psi_2(0)\rangle$ est donnée par

$$|\Psi_2(t)\rangle = e^{-iHt}|\Psi_2(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i3\omega t/2}[|1\rangle + e^{i\alpha}e^{-i3\omega t}|4\rangle] \tag{3}$$

(b) La période de l'état physique est $T_2 = \frac{2\pi}{3\omega}$.

3. A un instant t quelconque, l'état $|\Psi(t)\rangle$ est donné par :

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{2}e^{-i\omega t/2}[|0\rangle + e^{-i3\omega t/}|3\rangle + e^{-i\omega t}|1\rangle + e^{i\alpha}e^{-i4\omega t}|4\rangle] \tag{4}$$

Parmi les quatre termes entre crochets, trois termes contiennent des exponentielles complexes ayant des périodes différentes ($\frac{2\pi}{\omega}$, $\frac{2\pi}{3\omega}$ et $\frac{2\pi}{4\omega}$). La période de l'état physique est donc $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Il est intéressant de remarquer que la combinaison linéaire de deux états $|\Psi_1(t)\rangle$ et $|\Psi_2(t)\rangle$ ayant la même période d'évolution ne donne pas forcément un état qui évolue avec la même période.

Exercice 2 : Distinction d'états

On note $p(0) = 1/2$ et $p(\pi/4) = 1/2$ les probabilités que le système soit initialement préparé dans les états $|0\rangle$ et $|0_{\pi/4}\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$, respectivement. On désigne par $p(x|\theta_i)$ la probabilité que la mesure effectuée par Bob dans la base $\mathcal{B}_\theta$ donne le résultat x lorsque le système se trouve initialement dans l'état $|0_{\theta_i}\rangle$ ($\theta_i \in \{0, \pi/4\}$). On a donc

$$p(0|\theta_i) = |\langle 0_\theta|0_{\theta_i}\rangle|^2 \tag{5}$$
$$p(1|\theta_i) = |\langle 1_\theta|0_{\theta_i}\rangle|^2. \tag{6}$$

La probabilité jointe que l'état initial du système soit $|0_{\theta_i}\rangle$ *et* que Bob mesure x, notée $p(x,\theta_i)$ est donc

$$p(x,\theta_i) = p(x|\theta_i)p(\theta_i) = \frac{1}{2}|\langle x_\theta|0_{\theta_i}\rangle|^2. \tag{7}$$

Finalement, la probabilité que Bob ait raison, notée P, est

$$\begin{aligned} P &= p(0,0) + p(1,\pi/4) \\ &= \frac{1}{2}|\langle 0_\theta|0\rangle|^2 + \frac{1}{2}|\langle 1_\theta|0_{\pi/4}\rangle|^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Cette probabilité dépend de l'orientation θ de la base $\mathcal{B}_\theta$ utilisée par Bob. On examine dans les trois questions deux cas particuliers, puis le cas général à θ quelconque.

1. Cas $\theta = 0$. La probabilité que Bob ait raison est

$$P = \frac{1}{2}|\langle 0|0\rangle|^2 + \frac{1}{2}|\langle 1|0_{\pi/4}\rangle|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \tag{9}$$

2. Cas $\theta = \pi/8$. Dans ce cas la probabilité P est

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}|\langle 0_{\pi/8}|0\rangle|^2 + \frac{1}{2}|\langle 1_{\pi/8}|0_{\pi/4}\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}\right) - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} \\ &= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + 1\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{10}$$

où l'on a utilisé les identités $\cos^2\theta = (\cos 2\theta + 1)/2$ et $\sin\theta\cos\theta = (\sin 2\theta)/2$.

3. Dans le cas général (θ quelconque), l'équation (8) donne

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\cos^2\theta + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(2 + \cos 2\theta - \sin 2\theta\right). \end{aligned} \tag{11}$$

La probabilité P est une fonction périodique de θ, de période π. La dérivée

$$\frac{dP}{d\theta} = -\frac{1}{2}\left(\sin 2\theta + \cos 2\theta\right) \tag{12}$$

s'annule pour $\sin 2\theta = -\cos 2\theta$, c'est-à-dire 2θ congru à $3\pi/4$ modulo π, ce qui donne les racines suivantes dans l'intervalle $[0, \pi[$:

$$\theta_1 = 3\pi/8, \qquad \theta_2 = 7\pi/8. \tag{13}$$

La dérivée seconde $d^2P/d\theta^2 = -\cos 2\theta + \sin 2\theta$ prend les valeurs

$$\left.\frac{d^2P}{d\theta^2}\right|_{\theta_1} = 2\sin\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} > 0 \tag{14}$$

$$\left.\frac{d^2P}{d\theta^2}\right|_{\theta_2} = 2\sin\frac{7\pi}{4} = -\sqrt{2} < 0 \tag{15}$$

Ceci montre que $P(\theta_1)$ et $P(\theta_2)$ sont respectivement les minimum et maximum absolus de P. Le choix de θ qui maximise la probabilité que Bob ait raison est donc $\theta = 7\pi/8$ (à π près). Cette probabilité maximale vaut

$$P_{\max} = \frac{1}{4}\left(2 + \cos\frac{7\pi}{4} - \sin\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}. \tag{16}$$

On vérifie que cette valeur de P est bien supérieure à celle trouvée dans les deux cas particuliers examinés auparavant.

Exercice 3 : Deux particules avec force harmonique

En ramenant le problème au cas classique, on observe que le hamiltonien en question est celui d'un système de deux particules identiques de masse m, reliées par un ressort de raideur $k = m\omega^2$ et de longueur à vide nulle. Afin de découpler les deux variables, il suffit de transformer les positions x_1 et x_2 en deux nouveaux degrés de liberté $X_1 = \frac{x_1+x_2}{2}$ et $X_2 = x_1 - x_2$ représentant la position du centre de masse du système et l'allongement du ressort, respectivement. Les nouvelles quantités de mouvement seront $P_1 = p_1 + p_2$ (la quantité de mouvement du centre de masse) et $P_2 = \frac{p1-p2}{2}$. On vérifie facilement que les nouvelles variables satisfont les relations de commutation canoniques, i.e. $[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ et $[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = 0 = [\hat{P}_i, \hat{P}_j]$, $i \in \{1, 2\}$. Le hamiltonien en fonction des nouvelles variables s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{P}_1^2}{4m} + \frac{\hat{P}_2^2}{m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}_2^2 \\ &= \frac{\hat{P}_1^2}{4m} + \frac{\hat{P}_2^2}{2(m/2)} + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)\underbrace{2\omega^2}_{\omega'^2}\hat{X}_2^2 \end{aligned} \tag{17}$$

On obtient ainsi $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$ où $\hat{H}_1$ est le hamiltonien d'une particule libre (le centre de masse) et $\hat{H}_2$ est celui d'un oscillateur harmonique, avec $[\hat{H}_1, \hat{H}_2] = 0$. Le spectre de ce hamiltonien est donc $\frac{1}{2}\hbar\omega' + \mathbb{R}_+$. Les valeurs propres sont de la forme $E = \hbar\omega'(n+1/2) + \frac{\hbar^2(k_1+k_2)^2}{4m}$ avec $k_i = \frac{p_i}{\hbar}$. En comparant le cas quantique au cas classique, on remarque tout d'abord que le fondamental de l'oscillateur harmonique quantique a une énergie $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega' \neq 0$. En outre, contrairement au cas classique, le mouvement relatif est quantifié.