Mécanique Quantique I, Partiel 1

Epreuve du 4 novembre 2014 - 9h15 - 11h15

Cet énoncé de deux pages comporte trois exercices indépendants.

Quelques points à considérer :
- La copie doit être rédigée au stylo ou stylo-plume bleu ou noir, à l'encre indélébile ; le crayon papier, en particulier, n'est pas autorisé, sauf pour les graphes.
- Votre nom doit figurer en majuscules sur chaque page.
- Numérotez chaque page et indiquez le nombre total de feuilles doubles sur la première page en fin d'épreuve.
- Veuillez donner une explication, au moins brève, des calculs que vous entreprenez. Toute réponse appelle une justification, même succincte.

Exercice 1 : Evolution temporelle d'un oscillateur harmonique (2 points)

On considère un oscillateur harmonique à une dimension caractérisé par une masse m et une pulsation ω.

1. On prépare le système dans l'état $|\Psi_1(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + |3\rangle\right]$, où $|n\rangle$ $(n = 0, 1, \dots)$ désigne le n-ième état excité de l'oscillateur ($\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$).
   (a) Donner l'expression de $|\Psi_1(t)\rangle$ correspondant à l'état du système à un instant t quelconque.
   (b) En déduire que l'évolution du système est périodique. Donner la période de l'état physique du système, c'est-à-dire le temps minimal après lequel l'espérance (la valeur moyenne) d'une observable quelconque sera la même qu'à $t = 0$.
2. On considère maintenant l'état initial $|\Psi_2(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1\rangle + e^{i\alpha}|4\rangle\right]$. Répondre aux parties (a) et (b) de la question précédente pour l'état $|\Psi_2(t=0)\rangle$.
3. On considère finalement un état initial formé d'une combinaison linéaire des deux états précédents, $|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\Psi_1(t=0)\rangle + |\Psi_2(t=0)\rangle\right]$. Quelle est la période de l'état physique du système ?

Exercice 2 : Distinction d'états (2 points)

On considère un système quantique dont les états sont décrits par un espace de Hilbert de dimension 2, et l'on note $\mathcal{B} = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ une base particulière de cet espace. Le système est préparé aléatoirement soit dans l'état $|0\rangle$, soit dans l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + |1\rangle\right]$, avec des probabilités égales. Un observateur nommé Bob cherche à déterminer quel est l'état du système, qu'il sait être $|0\rangle$ ou $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + |1\rangle\right]$.

On note $\mathcal{B}_\theta = \{|0_\theta\rangle, |1_\theta\rangle\}$ la base formée par les vecteurs

$$\begin{aligned} |0_\theta\rangle &= \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle \\ |1_\theta\rangle &= -\sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle. \end{aligned}$$

On entend par "mesure dans la base $\mathcal{B}_\theta$" la mesure d'une observable qui est diagonale dans la base $\mathcal{B}_\theta$, et qui donne avec certitude le résultat 0 si l'état sur lequel est effectué la mesure est $|0_\theta\rangle$, et avec certitude le résultat 1 si l'état est $|1_\theta\rangle$.

1. Supposons que Bob mesure dans la base $\mathcal{B}_0$ $(\theta = 0)$. Si le résultat est 0, Bob suppose que l'état était $|0\rangle$; sinon, il suppose que l'état était $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + |1\rangle\right]$. Quelle est la probabilité qu'il ait raison ?
2. Supposons que Bob mesure dans la base $\mathcal{B}_{\pi/8}$. Comme précédemment, il suppose que l'état était $|0\rangle$ si le résultat de sa mesure est 0, et $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + |1\rangle\right]$ sinon. Quelle est alors sa probabilité d'avoir raison ?
3. Pour quel(s) choix d'angle θ une mesure dans la base $\mathcal{B}_\theta$ donnera-t-elle raison à Bob avec la plus grande probabilité ?

Tournez la page s.v.p.

Exercice 3 : Deux particules avec force harmonique (2 points)

On considère le système composé de deux particules en une dimension. Le hamiltonien est donné par

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2 \,,$$

avec $[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = [\hat{p}_1, \hat{p}_2] = [\hat{x}_1, \hat{p}_2] = [\hat{x}_2, \hat{p}_1] = 0$. A l'aide d'un changement de variables, calculer le spectre des valeurs propres de l'énergie du système.

Suggestion : Si le hamiltonien d'un système est donné par $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$, avec $[\hat{H}_1, \hat{H}_2] = 0$, alors le système est composé de deux sous-systèmes mutuellement indépendants, caractérisés par les hamiltoniens $\hat{H}_1$ et $\hat{H}_2$. De plus, les états propres $\{|\phi_{m,n}\rangle\}$ de $\hat{H}$ peuvent être choisis de sorte à être simultanément des états propres de $\hat{H}_1$ et $\hat{H}_2$, avec

$$\begin{aligned}
\hat{H}_1|\phi_{m,n}\rangle &= E_{1,m}|\phi_{m,n}\rangle \\
\hat{H}_2|\phi_{m,n}\rangle &= E_{2,n}|\phi_{m,n}\rangle \\
\hat{H}|\phi_{m,n}\rangle &= (E_{1,m} + E_{2,n})|\phi_{m,n}\rangle .
\end{aligned}$$

Pour résoudre ce problème, trouver le changement de variables qui permet d'écrire $\hat{H}$ comme la somme de deux hamiltoniens de deux systèmes indépendants. Réfléchir à quelle serait la solution du même problème en physique classique.

Fin de l'énoncé.