Mécanique Quantique I, Partiel 2

Epreuve du 2 décembre 2014 - 9h15 - 11h15

Cet énoncé de deux pages comporte deux exercices indépendants.

Quelques points à considérer :
- La copie doit être rédigée au stylo ou stylo-plume bleu ou noir, à l'encre indélébile ; le crayon papier, en particulier, n'est pas autorisé, sauf pour les graphes.
- Votre nom doit figurer en majuscules sur chaque page.
- Numérotez chaque page et indiquez le nombre total de feuilles doubles sur la première page en fin d'épreuve.
- Veuillez donner une explication, au moins brève, des calculs que vous entreprenez. Toute réponse appelle une justification, même succincte.

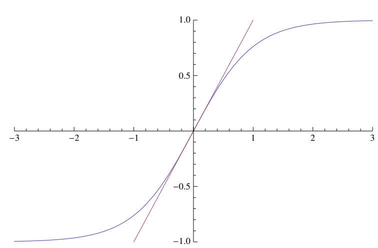
Exercice 1 : Puits de potentiel (3.5 points)

On s'intéresse aux états stationnaires d'une particule de masse m en une dimension, soumise au potentiel suivant :

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \leq -L/2 \\ V_0 & \text{si } -L/2 < x \leq 0 \text{ (région 1)} \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq L/2 \text{ (région 2)} \\ +\infty & \text{si } L/2 < x \end{cases} \tag{1}$$

où V_0 est une constante positive. On introduit la quantité $\alpha = \sqrt{mV_0L^2/(2\hbar^2)}$, utile par la suite.

1. On examine d'abord les états propres d'énergie E telle que $0 < E < V_0$.
   (a) Donner la forme générale des fonctions d'ondes correspondantes dans les régions 1 et 2.
   (b) En employant les conditions aux bords et les conditions de raccordement, montrer que les énergies propres sont les solutions de l'équation $f(x) = g_\alpha(x)$, avec $x = \sqrt{mEL^2/(2\hbar^2)}$ et
   $$f(x) = \frac{\tan x}{x} \tag{2}$$
   $$g_\alpha(x) = -\frac{\tanh\sqrt{\alpha^2 - x^2}}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}. \tag{3}$$
   (c) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g_\alpha(x)$ pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et $\alpha = \pi$.
   Indication : afin de déterminer l'allure et les asymptotes de g_α, on examinera d'abord le comportement des fonctions $x \mapsto \sqrt{\alpha^2 - x^2}$ et $y \mapsto -\tanh(y)/y$. On rappelle l'allure de la fonction tanh :



   (d) Déterminer le nombre d'états propres tels que $0 < E < V_0$ en fonction de la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}^+$; on notera u_i ($i = 1, 2, \dots$) les solutions strictement positives de l'équation $\tan(u) = -u$.
2. On examine maintenant les états propres d'énergie $E > V_0$. Montrer que les énergies propres sont les solutions de l'équation $f(x) = h_\alpha(x)$ où f et x sont définis comme précédemment et h_α est une fonction que l'on précisera.

Tournez la page s.v.p.

Exercice 2 : Moment cinétique (2.5 points)

On considère les états $|\psi_x\rangle$, $|\psi_y\rangle$ et $|\psi_y\rangle$ de fonctions d'onde

$$\psi_x(x,y,z) = xf(r) \quad (4)$$
$$\psi_y(x,y,z) = yf(r) \quad (5)$$
$$\psi_z(x,y,z) = zf(r) \quad (6)$$

où $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et f est une fonction que l'on suppose telle que les $|\psi_j\rangle$ $(j = x, y, z)$ sont normés à un. En coordonnées sphériques, l'opérateur $\hat{L}_z$ correspondant à la projection sur z du moment cinétique s'écrit

$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}, \quad (7)$$

où ϕ est l'angle azimuthal (décrivant le mouvement autour de l'axe z).

1. Calculer l'action de $\hat{L}_z$ sur les états $|\psi_x\rangle$, $|\psi_y\rangle$ et $|\psi_z\rangle$.
2. Sans effectuer de calculs supplémentaires, en déduire l'action de $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ et $\hat{L}^2$ sur chacun des $|\psi_j\rangle$ $(j = x, y, z)$.
3. Montrer que l'action de l'opérateur de rotation autour de z, à savoir

$$\hat{U}(\alpha) = e^{-i\alpha\hat{L}_z/\hbar}, \quad (8)$$

est donnée par

$$\hat{U}(\alpha)|\psi_j\rangle = \sum_k R_{j,k}|\psi_k\rangle, \quad (9)$$

où R est une matrice dont on déterminera les coefficients.

Fin de l'énoncé.