Mécanique Quantique I, Corrigé 2

Assistants : joseph.saliba@epfl.ch & pierre.lugan@epfl.ch

Exercice 1 : Le Corps Noir

1. On considère un champ électromagnétique $\vec{A}$ dans une boîte cubique de côté L aux conditions aux bords périodiques, c'est à dire qu'on veut que $\vec{A}(x+L,y,z) = \vec{A}(x,y,z)$ pour les trois directions. On utilise les conditions aux bords périodiques quand on veut réduire les effets de taille finie, ce qui est notre cas, comme on prendra la limite $L \to \infty$; en effet, si on utilisait par exemple les conditions aux bords de Dirichlet, c'est à dire $\vec{A}(0,x,y) = \vec{A}(L,y,z) = 0$ pour les trois directions, on augmenterait les effets de surface, les bords de la boîte étant traités différemment que l'intérieur (en fait dans le cas présent, utiliser des conditions aux bords de Dirichlet aboutirait au même résultat, mais manipuler des ondes planes à vecteur d'onde donné est plus simple que manipuler des ondes sinusoidales et cosinusoidales ; voir ci-dessous).

   La solution de l'équation de Helmholtz dans le vide, $(\nabla^2 + k^2)\vec{A} = 0$, avec $k^2 = \omega^2/c^2$, est simplement une onde plane :
$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}_0 \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{1}$$
   Pour satisfaire les conditions aux bords, seul un nombre discret de vecteurs d'onde est possible :
$$\vec{k}_{\vec{n}} = \frac{2\pi}{L}\vec{n} \quad , \quad \vec{n} = (n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{Z}^3 \tag{2}$$
   et pour chacun, il y a deux polarisations indépendantes possibles $\vec{A}_0^p$, $p = 1, 2$. Usuellement, on appelle ces ondes planes "modes" du champ électromagnétique.

   Le nombre de modes de fréquence $\nu' = \omega'/2\pi = |\vec{k}'|c/2\pi$ inférieure à une fréquence donnée ν est
$$N_L(\nu) = \sum_{\vec{k}',p} \Theta(\nu - |\vec{k}'|c/2\pi) = 2\sum_{\vec{k}'} \Theta(\nu - |\vec{k}'|c/2\pi), \tag{3}$$
   où Θ est la fonction de Heaviside et le facteur deux dans la dernière égalité vient de la somme sur p (polarisation). En clair, au facteur 2 près dû à la polarisation, ce nombre de modes correspond au nombre de noeuds du réseau cubique formé par les vecteurs d'onde $\vec{k}_n$ dans l'espace réciproque qui tombe dans la boule de rayon $k = 2\pi\nu/c$. Ce nombre est donc approximativement donné par le nombre de cubes de côté $2\pi/L$ contenus dans cette boule et, approximativement aussi, par le volume de la boule divisé par le volume d'un petit cube, à savoir $\frac{4}{3}\pi k^3 (L/2\pi)^3 = \frac{4}{3}\pi\nu^3 L^3/c^3$. Ce résultat devient asymptotiquement exact dans la limite $L \to \infty$, lorsque le volume des petits cubes devient infinitésimal et que les effets de discrétisation près de la surface de la boule deviennent négligeables. Après inclusion du facteur 2 dû aux deux degrés de liberté de polarisation, on obtient (ici sans justification rigoureuse) la limite
$$\lim_{L\to\infty} \frac{N_L(\nu)}{L^3} = 2\frac{4\pi\nu^3}{3c^3} \equiv \mathcal{N}(\nu), \tag{4}$$
   et il en découle la densité d'états par unité de volume de la cavité et par unité de fréquence
$$\boxed{n(\nu) = \frac{d\mathcal{N}}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}}. \tag{5}$$
   Remarque : revenant à l'expression (3), on a
$$\frac{N_L}{L^3} = \sum_{\vec{k}'} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \frac{2}{(2\pi)^3} \Theta\left(\nu - \frac{|\vec{k}'|c}{2\pi}\right). \tag{6}$$

On reconnaît dans le membre de droite une somme de Riemann avec $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = (2\pi/L)^3$, qui tend donc pour $L \to \infty$ vers l'intégrale tridimensionnelle

$$\mathcal{N}(\nu) \equiv \lim_{L\to\infty} \frac{N_L(\nu)}{L^3} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k' \frac{2}{(2\pi)^3} \Theta\left(\nu - \frac{|\vec{k}'|c}{2\pi}\right). \tag{7}$$

L'intégration en coordonnées sphériques et le passage en fréquences ($\nu' = c|\vec{k}'|/2\pi$) donne

$$\mathcal{N}(\nu) = \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} dk' k'^2 \Theta\left(\nu - \frac{|\vec{k}'|c}{2\pi}\right) = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^{+\infty} d\nu' \nu'^2 \Theta\left(\nu - \nu'\right), \tag{8}$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{N}(\nu) = \int_0^{\nu} d\nu' \frac{8\pi}{c^3} \nu'^2 = \frac{8\pi}{3c^3} \nu^3. \tag{9}$$

Autrement dit, on retrouve ici par le calcul les résultats obtenus plus haut sur la base de raisonnements géométriques approximatifs.

2. On veut calculer l'énergie moyenne d'un seul oscillateur harmonique de fréquence $\nu = \omega/2\pi$ à l'équilibre thermique. On multipliera par la suite cette énergie moyenne par la densité de modes à la fréquence $n(\nu)$ pour trouver la densité d'énergie par unité de fréquence $u_\nu(\nu, T)$. En utilisant la distribution statistique de Boltzmann pour l'oscillateur harmonique, nous pouvons écrire

$$\langle E_\nu \rangle = \frac{\int E_\nu(p,q) \exp\left(-\frac{E_\nu(p,q)}{k_B T}\right) dp\, dq}{\int \exp\left(-\frac{E_\nu(p,q)}{k_B T}\right) dp\, dq} \tag{10}$$

Commençons par calculer la fonction de partition au dénominateur, à savoir

$$Z = \int \exp\left(-\beta E(p,q)\right) dp\, dq\ , \quad \beta = \frac{1}{k_B T}. \tag{11}$$

Dans le cas l'oscillateur harmonique, tel que $E = E_\nu(p,q)$, la fonction de partition est le produit de deux intégrales gaussiennes, facilement calculables :

$$Z = \int_{\mathbb{R}} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} dp \int_{\mathbb{R}} e^{-\beta \frac{m\omega^2}{2} q^2} dq = \int_{\mathbb{R}} e^{-p^2/2\sigma_p^2} dp \int_{\mathbb{R}} e^{-q^2/2\sigma_q^2} dq = 2\pi\sigma_p\sigma_q, \tag{12}$$

où l'on a introduit $\sigma_p = \sqrt{m/\beta}$ et $\sigma_q = 1/\sqrt{\beta m \omega^2}$. On obtient donc

$$Z = \frac{2\pi}{\beta\omega} = \frac{1}{\beta\nu}. \tag{13}$$

Pour ce même oscillateur harmonique, le numérateur s'écrit

$$\begin{aligned}
Z\langle E_\nu \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}\right) e^{-\beta\frac{p^2}{2m} - \beta\frac{m\omega^2 q^2}{2}} dp\, dq \\
&= \frac{1}{2\beta\sigma_p^2} \int p^2 e^{-p^2/2\sigma_p^2} dp \int e^{-q^2/2\sigma_q^2} dq + \frac{1}{2\beta\sigma_q^2} \int e^{-p^2/2\sigma_p^2} dp \int q^2 e^{-q^2/2\sigma_q^2} dq \\
&= \frac{\sqrt{2\pi\sigma_q^2}}{2\beta\sigma_p^2} \int p^2 e^{-p^2/2\sigma_p^2} dp + \frac{\sqrt{2\pi\sigma_p^2}}{2\beta\sigma_q^2} \int q^2 e^{-q^2/2\sigma_q^2} dq \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_p\sigma_q}{\beta} \int_{\mathbb{R}} u^2 e^{-u^2/2} = \frac{2\pi\sigma_p\sigma_q}{\beta} = \frac{Z}{\beta}
\end{aligned} \tag{14}$$

où entre les deux dernières lignes on a effectué les changements de variable $u = p/\sigma_p$ dans l'intégrale sur p et $u = q/\sigma_q$ dans l'intégrale sur q, et l'intégrale de la dernière ligne est calculée par partie :

$$\int_{\mathbb{R}} u^2 e^{-u^2/2} du = -\int_{\mathbb{R}} u \frac{d}{du} e^{-u^2/2} du = -\left[u e^{-u^2/2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}. \tag{15}$$

On a donc prouvé l'égalité

$$\boxed{\langle E_\nu \rangle = \frac{1}{\beta} = k_B T}, \tag{16}$$

en accord avec un résultat connu de physique statistique, connu sous le nom de *principe d'équipartition de l'énergie* (que l'on démontrerait comme ci-dessus), qui veut que l'énergie moyenne d'un système vaut "$\frac{1}{2}k_BT$ par terme quadratique dans l'expression de l'énergie" (ici nous avons p et q qui apparaissent au carré dans le hamiltonien $H_\nu(q,p) = E_\nu(q,p)$).
Il est utile de remarquer que, de façon générale (non pas juste pour l'oscillateur harmonique), l'énergie moyenne s'obtient par la derivée logarithmique de la fonction de partition par rapport à β :

$$\langle E \rangle = -\frac{d}{d\beta}[\ln\, Z] = -\frac{dZ/d\beta}{Z} = \frac{\int E(p,q)\exp\left(-\beta E(p,q)\right)\, dp\, dq}{\int \exp\left(-\beta E(p,q)\right)\, dp\, dq} \tag{17}$$

Cette observation peut nous épargner quelques calculs, une fois obtenue la fonction de partition. Dans le cas de l'oscillateur harmonique, on trouve ainsi directement

$$\langle E_\nu \rangle = -\frac{d}{d\beta}\ln\frac{1}{\beta\nu} = \frac{d}{d\beta}\ln(\beta\nu) = \frac{1}{\beta}. \tag{18}$$

3. La densité d'énergie du corps noir qui découle d'une part de la densité de modes calculée à la première question, et d'autre part de l'énergie moyenne calculée par le biais des lois de la physique statistique classique à la seconde question, est

$$\boxed{u_\nu^{\mathrm{RJ}}(\nu,T) = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 k_B T} \tag{19}$$

Cette distribution n'admet aucun maximum, la loi de déplacement de Wien ne peut donc être satisfaite. De plus, à grandes fréquences, cette densité diverge comme ν^2, et ne peut donc même pas définir l'énergie totale (l'intégrale sur ν est infinie) ! Et en particulier, la loi de Stefan-Boltzmann n'est pas vérifiée.

4. La loi de Wien, qui stipule que toutes les courbes $\lambda \mapsto u_\lambda(\lambda,T)$ se laissent superposer (sur une courbe "universelle") moyennant une multiplication de λ par T et par le rééchelonnement de l'amplitude globale de ces courbes par un facteur dépendant de T, se traduit par l'écriture

$$u_\lambda(\lambda,T) = G(T)F(\lambda T), \tag{20}$$

où F est la courbe "universelle" de la loi de Wien. Afin que les fonctions soient adimensionnées et admettent pour arguments des nombres sans dimensions, on peut également écrire

$$u_\lambda(\lambda,T) = a_1 g\left(\frac{T}{a_2}\right) f\left(\frac{\lambda T}{a_3}\right), \tag{21}$$

où f et g sont sans dimension, et a_1, a_2 et a_3 ont pour dimensions respectives $[a_1] = J\cdot m^{-4}$, $[a_2] = K$ et $[a_3] = m\cdot K$. La loi de Stefan-Boltzmann implique

$$\frac{4\sigma}{c}T^4 = \int_0^\infty u_\lambda(\lambda,T)d\lambda = a_1 g\left(\frac{T}{a_2}\right)\int_0^\infty f(u)\frac{a_3}{T}du = \frac{a_1 a_3 C_f}{T} g\left(\frac{T}{a_2}\right), \tag{22}$$

où $C_f = \int f$ est une constante sans dimension. On en déduit

$$a_1 g\left(\frac{T}{a_2}\right) = \frac{4\sigma}{c a_3 C_f}T^5, \tag{23}$$

c'est-à-dire

$$u_\lambda(\lambda,T) = \alpha_1 T^5 f(\lambda T/\alpha_2), \tag{24}$$

où $\alpha_1 = 4\sigma/ca_3C_f$ a pour dimension $[\alpha_1] = J\cdot m^{-4}\cdot K^{-5}$ et $\alpha_2 = a_3$ a pour dimension $[\alpha_2] = m\cdot K$. Pour trouver $u_\nu(\nu, T)$ il faut faire un changement de variables en utilisant $\lambda = c/\nu$, d'où $d\lambda = -c\, d\nu/\nu^2$, et en se souvenant que les densités u_λ et u_ν sont par définition positives :

$$u_\nu(\nu, T)|d\nu| = u_\lambda(\lambda, T)|d\lambda| \tag{25}$$

$$\Rightarrow u_\nu(\nu, T) = \alpha_1 T^5 \frac{c}{\nu^2} f\left(\frac{c\,T}{\alpha_2\nu}\right) = \frac{\alpha_1\alpha_2^2}{c} T^3 \left(\frac{c\,T}{\alpha_2\nu}\right)^2 f\left(\frac{c\,T}{\alpha_2\nu}\right) = \tilde{\alpha}_1 T^3 \tilde{f}\left(\frac{\nu}{\tilde{\alpha}_2 T}\right) \tag{26}$$

où $\tilde{\alpha_1} = \alpha_1\alpha_2^2/c$, $\tilde{\alpha_2} = c/\alpha_2$, $\tilde{f}(u) = u^{-2}f(1/u)$, et donc $[\tilde{\alpha}_1] = J\cdot s\cdot m^{-3}\cdot K^{-3}$ et $[\tilde{\alpha}_2] = s^{-1}\cdot K^{-1}$.

5. Supposons que les états de chaque oscillateur, au lieu d'être caractérisés par une énergie "continue" $E_\nu(p, q)$, soient caractérisés par une énergie "discrétisée"

$$E_\nu = E_\nu(n) = nE_\nu^0\ , \qquad E_\nu^0 > 0,\ n = 0, 1, 2... \tag{27}$$

Dans ce cas, la loi de Boltzmann fait intervenir une somme sur les états n à la place de l'intégrale sur l'espace des phases ; cette distinction est essentielle à la différence entre le cas classique et le cas quantique. La fonction de partition s'écrit ($\beta E_\nu^0 > 0$)

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E(n)}{k_BT}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n E_\nu^0} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-\beta E_\nu^0}\right)^n = \frac{1}{1-e^{-\beta E_\nu^0}} \tag{28}$$

On calcule aisément la moyenne de l'énergie :

$$\begin{aligned}\langle E_\nu\rangle &= \frac{\sum_n E_\nu(n)e^{-\frac{E_\nu(n)}{k_BT}}}{Z} = -\frac{d}{d\beta}\ln Z \\ &= -\frac{d}{d\beta}\ \ln\frac{1}{1-e^{-\beta E_\nu^0}} = \frac{d}{d\beta}\ \ln\left(1-e^{-\beta E_\nu^0}\right) \\ &= \frac{E_\nu^0 e^{-\beta E_\nu^0}}{1-e^{-\beta E_\nu^0}} = \frac{E_\nu^0}{e^{\beta E_\nu^0}-1}\end{aligned} \tag{29}$$

Le résultat est donc :

$$\boxed{\langle E_\nu\rangle_T^{\mathrm{P}} = \frac{E_\nu^0}{e^{\beta E_\nu^0}-1}} \tag{30}$$

6. La densité d'énergie du rayonnement du corps noir devient donc

$$\boxed{u_\nu^{\mathrm{P}}(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3}\,\nu^2\frac{E_\nu^0}{e^{\beta E_\nu^0}-1} = \frac{8\pi}{c^3}\,\nu^2\frac{E_\nu^0}{e^{E_\nu^0/k_BT}-1}} \tag{31}$$

— Sous l'hypothèse $E_\nu^0 = h\nu$, avec h constante, on a

$$u_\nu^P(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}. \tag{32}$$

Comme précédemment, la densité d'énergie par unité de volume et de longueur d'onde s'obtient par le changement de variable $\nu = c/\lambda$, $d\nu = -cd\lambda/\lambda^2$:

$$u_\lambda^P(\lambda, T) = u_\nu^P\left(\frac{c}{\lambda}, T\right)\left|\frac{d\nu}{d\lambda}\right| = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda k_BT}-1} = \alpha_1^P T^5 f^P\left(\frac{\lambda T}{\alpha_2^P}\right) \tag{33}$$

avec

$$\alpha_1^P = 8\pi k_B^5/h^4c^4 \tag{34}$$

$$\alpha_2^P = hc/k_B \tag{35}$$

$$f^P(u) = \frac{u^{-5}}{e^{1/u}-1}. \tag{36}$$

Une densité u_λ qui se laisse mettre sous une telle forme $u_\lambda(\lambda) = \alpha_1 T^5 f(\lambda T/\alpha_2)$ satisfait naturellement la loi de Wien, dans le sens où elle se laisse réechelonner en une courbe universelle selon le procédé précisé dans l'énoncé. De plus, à condition que f admette un maximum unique en u_m tel que

$$\alpha_2 u_m = \lambda_m T = 2.898 \cdot 10^{-3} m \cdot K, \tag{37}$$

l'observation expérimentale quant à $\lambda_m T$ est aussi reproduite. Enfin, nous avons

$$\int \alpha_1 T^5 f(\lambda T/\alpha_2)\, d\lambda = \alpha_1 \alpha_2 T^4 \int f(u)\, du, \tag{38}$$

donc pourvu que $\alpha_1\alpha_2 C_f = \alpha_1\alpha_2 \int f = 4\sigma/c$, cette densité satisfait aussi la loi de Stefan-Boltzmann (avec cette dernière condition, nous avons donc une réciproque de la l'implication démontrée à la question 4). La densité de Planck satisfait donc la loi de Wien du point de vue des lois d'échelle. Le maximum de $f^P(u)$ se situant en $u_m^P = 0.201$ (solution de l'équation $u \ln(u/(u-1/5)) = 1$ obtenue en dérivant f^P), la densité de Planck est compatible avec la valeur expérimentale de $\lambda_m T$ pourvu que

$$h = \frac{\alpha_2^P k_B}{c} = \frac{k_B}{c}\frac{\lambda_m T}{u_m^P} = 6.63\, J \cdot s. \tag{39}$$

Finalement, à condition que

$$\frac{4\sigma}{c} = \alpha_1^P \alpha_2^P C_{f^P} = \frac{8\pi k_B^5}{h^4 c^4}\frac{hc}{k_B}\frac{\pi^4}{15} = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^3}, \tag{40}$$

soit

$$h = \left(\frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 \sigma}\right)^{1/3} = 6.63 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s, \tag{41}$$

la densité de Planck satisfait aussi la loi de Stefan-Boltzmann. Il existe donc une valeur de h compatible avec les lois de Wien et de Stefan-Boltzmann ainsi que les valeurs expérimentales afférentes !

— Supposons maintenant que la densité de Planck donnée à l'équation (31) satisfasse les lois de Wien et de Boltzmann. En vertu de l'équation (26), la densité de Planck doit alors pouvoir se mettre sous la forme

$$u_\nu^P(\nu, T) = \tilde{\alpha_1}^P T^3 \tilde{f}\left(\frac{\nu}{\tilde{\alpha_2}^P T}\right). \tag{42}$$

Du fait notamment de l'exponentielle au dénominateur de l'équation (31), dont le terme T^3 ci-dessus ne peut rendre compte, ceci impose $E_\nu^0/k_B T = \nu/\tilde{\alpha_2}^P T$, c'est-à-dire

$$E_\nu^0 = \frac{k_B}{\tilde{\alpha_2}^P}\nu = \frac{k_B \alpha_2}{c}\nu = h\nu, \tag{43}$$

où l'on a introduit la constante de Planck $h = k_B\alpha_2/c$. L'analyse dimensionnelle de α_2 (ou $\tilde{\alpha_2}$) montre que $[h] = J \cdot s$.

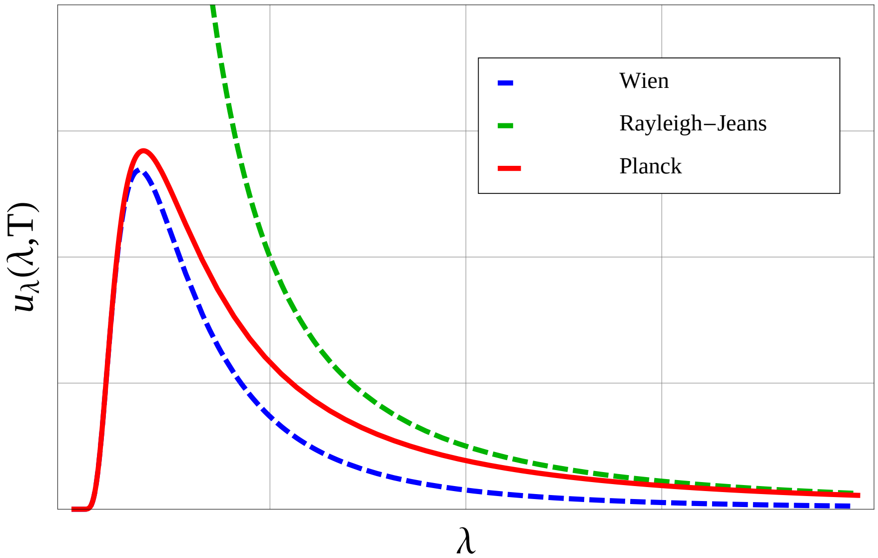
7. Pour $h\nu \ll k_B T$:

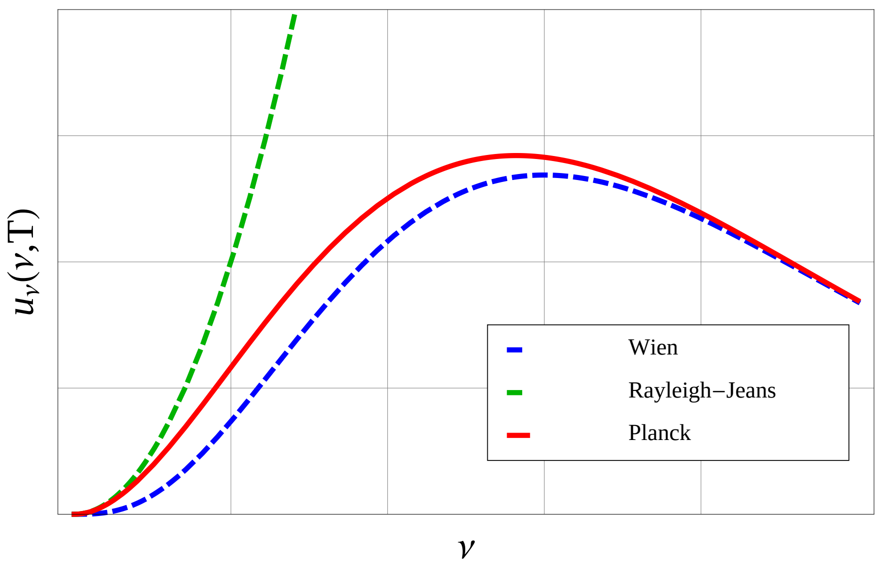
$$u_\nu^{\mathrm{P}}(\nu, T) \simeq \frac{8\pi}{c^3}\nu^3 \frac{h}{1 + \frac{h\nu}{k_B T} - 1} = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 k_B T = u_\nu^{\mathrm{RJ}}(\nu, T) \tag{44}$$

Pour $h\nu \gg k_B T$:

$$u_\nu^{\mathrm{P}}(\nu, T) \simeq \frac{8\pi}{c^3}\nu^3 \frac{h}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}} = \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} = u_\nu^{\mathrm{W}}(\nu, T) \tag{45}$$

Ces densités sont esquissées ci-dessous :





8. La densité d'énergie

$$u_\nu = n(\nu)\langle E_\nu\rangle \tag{46}$$

correspond à une moyenne au sens de la physique statistique. Calculons les fluctuations δE^2 afin de trouver ce que vaut $\delta u_\nu^2 = n^2 \delta E^2$. Nous effectuons le calcul dans le cadre de la physique statistique classique ; le calcul se répète facilement (avec un résultat identique) dans le cadre de la statistique quantique en remplaçant les intégrales $\int d\Omega$ par les sommes $\sum_n E(n)$.
Par définition

$$\delta E^2 = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2 = \frac{\int E^2 e^{-\beta E} d\Omega}{\int e^{-\beta E} d\Omega} - \left(\frac{\int E e^{-\beta E} d\Omega}{\int e^{-\beta E} d\Omega}\right)^2 \tag{47}$$

D'autre part, on peut constater que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T} &= \frac{1}{k_B T^2 (\int e^{-\beta E} d\Omega)^2}\left(\int E^2 e^{-\beta E} d\Omega \int e^{-\beta E} d\Omega - \int E e^{-\beta E} d\Omega \int E e^{-\beta E} d\Omega\right) \\ &= \frac{1}{k_B T^2}\left(\frac{\int E^2 e^{-\beta E} d\Omega}{Z} - \frac{(\int E e^{-\beta E} d\Omega)^2}{Z^2}\right) \end{aligned} \tag{48}$$

La comparaison des deux dernières équations montre que

$$\delta E^2 = k_B T^2 \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \tag{49}$$

$$\delta u_\nu^2 = n(\nu) k_B T^2 \frac{\partial u_\nu}{\partial T} \tag{50}$$

9. Avec la loi de Planck pour u_ν^{P}, on trouve aisément :

$$k_B T^2 \frac{\partial u_\nu^{\mathrm{P}}}{\partial T} = h\nu u_\nu^{\mathrm{P}} + \frac{c^3}{8\pi\nu^2} (u_\nu^{\mathrm{P}})^2 \tag{51}$$

Avec les lois de Wien et de Rayleigh-Jeans on trouve respectivement :

$$k_B T^2 \frac{\partial u_\nu^{\mathrm{RJ}}}{\partial T} = \frac{c^3}{8\pi\nu^2} (u_\nu^{\mathrm{RJ}})^2 \qquad \text{et} \qquad k_B T^2 \frac{\partial u_\nu^{\mathrm{W}}}{\partial T} = h\nu u_\nu^{\mathrm{W}} \tag{52}$$

On trouve donc qualitativement que :

$$\longrightarrow \delta u_\nu^2(\textit{Planck}) = \delta u_\nu^2(\textit{Wien}) + \delta u_\nu^2(\textit{Rayleigh-Jeans}) \quad (*) \tag{53}$$

Comme on l'a déjà vu, la loi de Rayleigh-Jeans n'est valable que pour les grandes longueurs d'onde alors que la loi de Wien n'est valable que pour les longueurs d'ondes courtes. C'est ce qui a permis à Einstein de faire une interprétation de (*) en terme de dualité onde-corpuscule. L'écart-type de l'énergie calculé avec la loi de Planck est en effet la somme de deux termes :

— un terme $\delta^2 u_{R-J}$ qui peut être relié à des interférences, et qu'on admettra donc comme étant relié à des propriétés ondulatoires.

— un terme $\delta^2 u_W$ que l'on peut interpréter comme venant de la fluctuation d'un nombre de photons d'énergie $h\nu$. Soit $\langle n \rangle$ le nombre moyen de photons d'énergie $h\nu$. Leur énergie est $h\nu \times n$. La fluctuation d'énergie associée vaut $(n - \langle n \rangle)h\nu$ et donc l'écart-type associé vaut :

$$\begin{aligned} \delta^2 u &= \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \langle (h\nu n)^2 \rangle - \langle h\nu n \rangle^2 \\ &= (h\nu)^2(\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2) = \delta^2 n (h\nu)^2 \ , \quad \delta^2 n \equiv \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 \\ &= \langle n \rangle (h\nu)^2 = u_\nu h\nu \qquad (\delta^2 n = \langle n \rangle, \ \textit{voir à la fin}) \end{aligned} \tag{54}$$

L'analyse d'Einstein montre donc que la loi de Planck implique la présence simultanée des propriétés onde **et** particule du champ.

— Preuve de $\delta^2 n = \langle n \rangle$

Les photons étant considérés comme des **particules indépendante**s, la statistique qui les décrit est la statistique poissonienne qui traduit le fait que l'on effectue un comptage. Cette statistique, du type $P(n) = e^{-\nu}\nu^n$ vérifie en particulier $\delta^2 n = \langle n \rangle$.