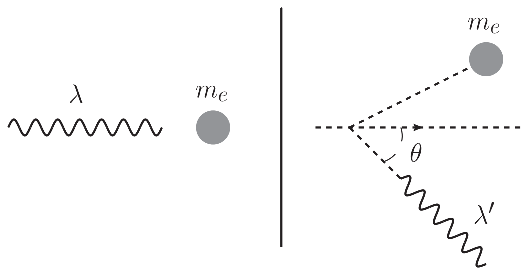
Mécanique Quantique I, Série 3

Assistants : joseph.saliba@epfl.ch & pierre.lugan@epfl.ch

Exercice 1 : Diffusion Compton relativiste

Considérer la diffusion élastique d'un photon de longueur d'onde λ sur un électron immobile :



En utilisant la conservation de l'énergie ($E_{photon} = |\vec{p}_{\text{photon}}|c = h\nu, E_{\text{électron}} = \sqrt{p^2c^2 + m_e^2c^4}$) et de la quantité de mouvement($p = \hbar k = h/\lambda$), montrer la relation de Compton :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

Exercice 2 : Atome d'hydrogène classique

L'électrodynamique classique nous apprend qu'une particule chargée accélérée émet des radiations sous forme d'ondes électromagnétiques. La puissance de cette radiation est donnée par la formule de Larmor :

$$W = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}a^2$$

où a est l'accélération de la charge. D'un autre côté, l'image classique de l'atome (d'hydrogène) est un électron qui tourne en orbite circulaire autour d'un proton. La première partie de cet exercice cherche à voir si ces deux faits sont compatibles.

On part de l'hypothèse que l'énergie perdue par l'électron lors d'un cycle est très faible, la trajectoire peut alors être décrite par une orbite circulaire dont le rayon diminue lentement.

1. Trouver l'énergie cinétique $T(r)$
2. Trouver la puissance rayonnée $W(r)$
3. En première approximation, on peut estimer que le temps de vie de l'atome est donné par le rapport :

$$\tau \approx \frac{T(r_0)}{W(r_0)}$$

où r_0 est le rayon initial. Donner l'expression de τ, puis estimer sa valeur à l'aide de l'application numérique suivante :

$$\begin{array}{rcll} e & \approx & 1.6 \cdot 10^{-19} & \text{A s} \\ m_e & \approx & 9.1 \cdot 10^{-31} & \text{kg} \\ \epsilon_0 & \approx & 8.85 \cdot 10^{-12} & \text{kg}^{-1}\text{m}^{-3}\text{A}^2\text{s}^4 \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} c & \approx & 3.0 \cdot 10^{8} & \text{m s}^{-1} \\ r_0 & \approx & 5.0 \cdot 10^{-11} & \text{m} \end{array}$$

4. Comparer le temps de vie τ à la période de rotation $\frac{2\pi}{\omega}$.

Dans la deuxième partie de l'exercice, on s'intéresse à la trajectoire de l'électron et la façon dont il tombe sur le proton. On reste dans l'hypothèse d'un mouvement quasi circulaire.

5. On va utiliser un résultat de mécanique classique appelé de **théorème du Viriel**. Il stipule que pour une particule dans un potentiel homogène ($V \propto r^n$) suivant une orbite périodique les moyennes temporelles de l'énergie cinétique et potentielle sont reliées par :

$$\langle T \rangle = \frac{n}{2} \langle V \rangle$$

   Pour ceux qui aimeraient démontrer ce résultat, voici la marche à suivre :

   (a) Considérer un système unidimensionnel avec un terme cinétique quadratique dans les vitesses et un potentiel $V(x) = \alpha x^n$. Montrer que :

$$2T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(px) - \dot{p}x$$

   (b) Montrer que la moyenne sur une orbite donne :

$$\langle 2T \rangle \equiv \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} 2T \mathrm{d}t = -\langle \dot{p}x \rangle$$

   (c) Utiliser les équations du mouvement et les propriétés du potentiel pour démontrer le théorème du viriel.

6. Appliquer ce résultat pour le cas d'une orbite circulaire de rayon r pour déduire l'énergie totale $E(r)$.
7. En utilisant les résultats précédents et la formule de Larmor, établir l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle du rayon r de l'orbite de l'électron. En déduire $r(t)$.

Exercice 3 : Vitesse de groupe

1. Considérer une fonction d'onde correspondant à une onde plane en une dimension

$$\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$$

   où pour une particule relativiste, $E = m_0 \gamma c^2$, $p = m_0 \gamma v$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

   Calculer la vitesse de phase de l'onde, c'est-à-dire la vitesse d'un point de phase constante. Montrer que cette vitesse ne peut pas correspondre à la vitesse de la particule.

2. Pour simplifier les calculs, on choisit un système d'unités dans lequel $\hbar = 1$.

   Toute fonction d'onde peut alors être décrite par la décomposition suivante :

$$\psi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} A(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)}$$

   normée à 1 : $\int d^3x |\psi(x,t)|^2 = 1$, avec $\omega_{\vec{k}} = H(\vec{k})$.

   Calculer la position moyenne sur l'axe $\hat{x}$ du paquet au cours du temps. Montrer que le résultat peut se factoriser sous la forme :

$$\langle \vec{x} \rangle(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_G \ t$$

   et donner l'expression pour $\vec{r}_0$ et $\vec{v}_G$. $\vec{v}_G$ est appelée vitesse de groupe du paquet d'onde et donne la réelle vitesse de propagation de la particule.

3. Montrer que pour un paquet très étroit en espace k centré autour de $\vec{k}_0$, on peut approximer

$$\vec{v}_G \simeq \vec{\nabla}_{\vec{k}_0} \omega_{\vec{k}_0}$$

4. Nous avons vu précédemment que la vitesse de groupe ne correspond pas à la vitesse de phase en module. Nous allons maintenant illustrer que la direction de la vitesse de groupe ne correspond pas toujours non plus à celle de la vitesse de phase.
   Considérer une particule décrite par un paquet étroit autour de $\vec{k}_0 = k_0(\cos\theta, 0, \sin\theta)$ qui traverse un des matériaux décrits par les Hamiltoniens suivants :
   (a) $H_a(\vec{k}) = \dfrac{1}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + \dfrac{\lambda_a}{2}k_z^2$
   (b) $H_b(\vec{k}) = \dfrac{1}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + \dfrac{\lambda_b}{4}k_z^4$

   Dans chaque cas :
   — Donner la dimension de λ
   — En déduire à quoi il doit être comparé pour dire s'il est petit ou grand
   — Trouver la vitesse de groupe (vérifier le résultat pour $\lambda = 0$)
   — Donner la direction de la vitesse de groupe (angle θ_{eff}), au premier ordre en λ. L'angle θ_{eff} est défini par $\vec{v}_G = |\vec{v}_G|(\cos\theta_{\text{eff}}, 0, \sin\theta_{\text{eff}})$
   — Discuter de la dépendance en k_0 de θ_{eff}.