Mécanique Quantique I, Série 4

Assistants : joseph.saliba@epfl.ch & pierre.lugan@epfl.ch

Exercice 1 : Représentations x et p

Cet exercice a pour but une meilleure familiarisation avec les représentations x et p tant pour les états que pour les opérateurs. De façon standard, $|x_0\rangle$ désigne le vecteur propre de l'opérateur position $\hat{x}$ pour la valeur propre x_0, et $|p_0\rangle$ le vecteur propre de l'opérateur impulsion $\hat{p}$ pour la valeur propre p_0.

Le point central est de se souvenir que ces représentations ne sont rien d'autre qu'un choix de base. On utilisera la propriété suivante (que l'on démontrera dans une série ultérieure), valable pour tout vecteur d'état $|\varphi\rangle$:

$$\langle x|\hat{p}|\varphi\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x). \tag{1}$$

On utilisera aussi la propriété

$$\int \mathrm{d}p|p\rangle\langle p| = \int \mathrm{d}x|x\rangle\langle x| = \mathbb{1}$$

Pour un état $|\psi\rangle$ on définit alors $\psi(x)$ et $\psi(p)$ comme les coefficients des décompositions

$$|\psi\rangle = \int \mathrm{d}p|p\rangle\underbrace{\langle p|\psi\rangle}_{\psi(p)} = \int \mathrm{d}x|x\rangle\underbrace{\langle x|\psi\rangle}_{\psi(x)}$$

1. Trouver la représentation x de l'état $|p\rangle$, à savoir $p(x) = \langle x|p\rangle$. On peut par exemple choisir $\langle x|\hat{p}|p\rangle$ comme point de départ et résoudre l'équation différentielle qui en découle. Penser à normaliser la fonction d'onde.
2. Déduire les relations qu'il y a entre $\psi(x)$ et $\psi(p)$.
3. Soient un opérateur $\hat{O}$ et deux états $|\psi_{1,2}\rangle$. Montrer que l'on peut réécrire :

   $$\langle\psi_1|\hat{O}|\psi_2\rangle = \iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \psi_1^*(x)O(x,y)\psi_2(y)$$

   tout en définissant $O(x,y)$, la représentation x de $\hat{O}$.
4. Trouver la représentation x de $\hat{x}$ et montrer qu'elle est diagonale.
5. Trouver la représentation x de $\hat{p}$ et montrer qu'elle n'est pas diagonale.
6. Trouver la représentation p de $\hat{x}$.
7. Trouver la représentation p de $\hat{p}$.
8. Ecrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps en représentation x dans le cas d'une particule de masse m évoluant dans un potential $V(x)$.
9. De même en représentation p.

Exercice 2 : Champ électrique constant

Considérer le problème unidimensionnel d'une particule de masse m et de charge q plongée dans un champ électrique constant E (avec $qE > 0$).

La résolution de cet exercice nécessite la résolution de l'exercice précédent.

1. On commencera par étudier la dynamique classique de cette particule.
   (a) Ecrire le hamiltonien classique du système.
   (b) Trouver les équations du mouvement.

(c) Esquisser certaines orbites dans l'espace de phase.

(d) Pour une particule sur une orbite donnée, estimer le temps qu'elle passe dans une région finie de l'espace.

2. Utiliser les résultats classiques pour esquisser une fonction d'onde propre et discuter si elle est normalisable.
3. Ecrire le hamiltonien quantique du système.
4. Ecrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps :
   (a) En représentation x.
   (b) En représentation p.
5. En utilisant le point précédent :
   (a) Trouver le spectre.
   (b) Trouver les états propres $\psi_\epsilon(x)$. (sous forme intégrale)
   (c) En déduire la norme de ψ_ϵ et la discuter.