Mécanique Quantique I, Série 5

Assistants : joseph.saliba@epfl.ch & pierre.lugan@epfl.ch

Exercice 1 : États cohérents

Considérons un oscillateur harmonique en une dimension. Nous allons introduire la notion d'« états cohérents ». Il s'agit, par définition, des états propres de l'opérateur d'annihilation $\hat{a}$. Ces états ont une grande importance physique, car ce sont les états quantiques qui se rapprochent le plus des états classiques. La relation d'incertitude de Heisenberg sera abordée dans le prochain cours ; dans ce contexte, il s'avère que pour les états cohérents le produit d'incertitude de Heisenberg $\Delta\hat{x}\,\Delta\hat{p}$ prend sa valeur minimale ; autrement dit, les états cohérents saturent l'inégalité de Heisenberg et sont en ce sens les états qui se rapprochent le plus des états classiques.

1. Écrire les états propres $|z\rangle$, de valeurs propres $z \in \mathbb{C}$, de l'opérateur d'annihilation $\hat{a}$ sous la forme :

$$|z\rangle = \sum_n c_n |\varphi_n\rangle \qquad \text{avec} \qquad \hat{a}|z\rangle = z|z\rangle$$

   où les états $|\varphi_n\rangle$ sont les états propres du hamiltonien de l'oscillateur harmonique. Établir la relation de récurrence vérifiée par les coefficients c_n.
2. Déterminer les coefficients c_n en fonction de c_0 et de z, et calculer le produit scalaire $\langle z|z'\rangle$. Déterminer c_0 pour que $|z\rangle$ satisfasse $\langle z|z\rangle = 1$. Cette famille d'états est elle orthonormée ? Quel état retrouve-t-on pour $z = 0$?
3. Un état cohérent est-il un état propre du hamiltonien de l'oscillateur harmonique ? Si non et que l'on prépare le système dans un état cohérent, déterminer la probabilité de mesurer le niveau d'énergie E_n de l'oscillateur harmonique.
4. Calculer les valeurs moyennes des opérateurs $\hat{x}$, $\hat{p}$ et $\hat{H}$ dans un état cohérent.
5. Faire de même pour un état $|\varphi_n\rangle$.
6. Calculer les valeurs moyennes des opérateurs $\hat{x}^2$ et $\hat{p}^2$ dans un état cohérent.
7. Faire de même pour un état $|\varphi_n\rangle$. En déduire $\Delta\hat{x}\,\Delta\hat{p}$ pour un tel état.
8. Calculer $\Delta\hat{x}\,\Delta\hat{p}$ dans un état cohérent. Peut-on dire que $\Delta\hat{x}$ est plus grand ou plus petit que $\Delta\hat{p}$? Donner un sens à cette comparaison.

Nous allons maintenant déterminer l'évolution temporelle d'un état cohérent. Nous ferons cette analyse dans la représentation de Schrödinger.

9. Sachant que l'équation différentielle satisfaite par $|z(t)\rangle$ est :

$$i\hbar \frac{d}{dt}|z(t)\rangle = \hat{H}|z(t)\rangle$$

   Déterminer et résoudre l'équation différentielle satisfaite par les $c_n(t)$ définis par :

$$|z(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|\varphi_n\rangle$$

   en prenant pour condition initiale $|z(0)\rangle = |z\rangle$.
10. Montrer qu'un état cohérent reste un état cohérent au cours du temps. Donner la valeur propre de $\hat{a}$ correspondante.
11. Calculer la moyenne de $\hat{x}$ si le système est dans l'état $|z(t)\rangle$.