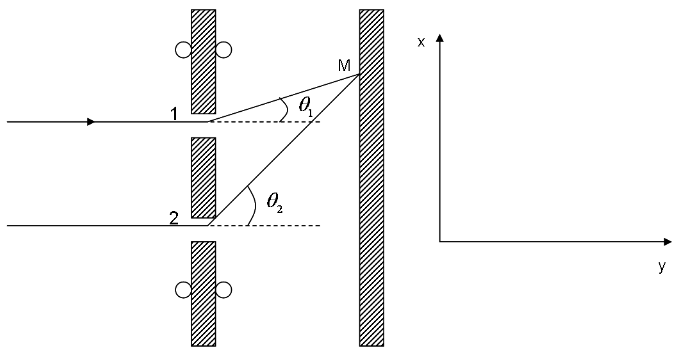
Mécanique Quantique I, Série 6

Assistants : joseph.saliba@epfl.ch & pierre.lugan@epfl.ch

Exercice 1 : Principe d'incertitude dans l'expérience de Young

Au cours, nous avons vu plusieurs versions de l'expérience de Young. Voici celle proposée par Einstein. En plus de son aspect historique, elle est intéressante car elle permet de mieux saisir le principe d'incertitude et le lien avec le principe de complémentarité.

Supposons que, comme montré sur le schéma ci-dessous, la plaque dans laquelle sont percées les fentes soit montée de façon à pouvoir se déplacer verticalement dans son plan. Si nous arrivons à mesurer avec une précision suffisante l'impulsion transférée, nous pouvons alors savoir par quelle fente est passée la particule. Introduisons encore la longueur d'onde de De Broglie λ, la distance entre la plaque et la paroi d, et la séparation entre les deux fentes a. Supposons que l'onde incidente sur la plaque se propage dans la direction $\hat{y}$.



1. Considérer le cas ondulatoire et trouver la distance entre les maximas de la distribution de probabilité de présence sur l'écran dans l'approximation des petits angles ($\theta_{1,2} \ll 1$).
2. Dans le cas corpusculaire, trouver l'impulsion transférée à la paroi pour une trajectoire donnée (caractérisée par un angle θ_i), toujours dans l'approximation des petits angles. En déduire la différence des impulsions communiquées lors d'un passage par l'une ou l'autre des fentes 1 ou 2.
3. A l'aide du principe d'incertitude, montrer qu'une précision suffisante dans la mesure des impulsions efface les franges d'interférence.

Exercice 2 : Le système à deux niveaux

Dans cet exercice nous considérons le système (non trivial) le plus simple possible, à savoir un système à deux niveaux. Il s'agit d'un système qui est décrit par des fonctions d'onde appartenant à $\mathbb{C}_2$. Les opérateurs sont donc, selon l'idée de la mécanique matricielle de Heisenberg, décrits par des matrices 2×2. En particulier, on peut toujours choisir une base telle que le hamiltonien soit donné par :

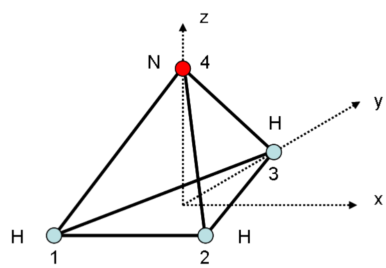
$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

Par la suite, nous introduisons une perturbation :

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$$

Le nouveau hamiltonien est alors donné par $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$.

1. Trouver les états propres (orthonormés) $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$ de $\hat{H}_0$.
2. Quelles conditions doivent être remplies par les quantités W_{ij} pour que $\hat{H}$ puisse décrire un hamiltonien ?
3. Trouver les valeurs propres $E'_{1,2}$ de $\hat{H}$.
4. Dans les deux cas suivants
$$\begin{aligned} \hat{W}_I &= \alpha\,\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{W}_{II} &= \beta\,\sigma_3 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
et en utilisant les résultats précédents,
— trouver les valeurs propres,
— définir $\Sigma = E_1 + E_2$ et $\Delta = |E_1 - E_2|$, ainsi que Σ' et Δ',
— comparer Σ et Σ',
— comparer Δ et Δ'.
5. Considérer la molécule d'ammoniac NH_3. La position de l'atome N peut être décrite par deux états, “en-dessus” et “en-dessous”, que l'on dénote par les kets $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$, respectivement.



   (a) Donner le hamiltonien $\hat{H}_0$ qui décrit ce système.
   (b) Donner la matrice représentative (dans la base $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$) de l'opérateur hermitien position $\hat{P}$ tel que :
$$\hat{P}|\phi_1\rangle = +a|\phi_1\rangle \quad , \quad \hat{P}|\phi_2\rangle = -a|\phi_2\rangle$$
   (c) On plonge la molécule d'ammoniac dans un champ extérieur de sorte à ce que le nouvel hamiltonien soit donné par
$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}_I + \hat{W}_{II}$$
   Dans cette configuration,
   — trouver les valeurs propres,
   — trouver les vecteurs propres,
   — donner la valeur de $\hat{P}$ dans chacun de ces états,
   — rappeler quelles valeurs peuvent être obtenues pour $\hat{P}$ à chaque mesure.

Exercice 3 : Règles de commutations et dégénérescence

On désigne par A_1, A_2 et H trois opérateurs hermitiques dans un espace de Hilbert. On suppose que
$$[A_1, H] = 0, \qquad [A_2, H] = 0$$

1. Démontrer que si $[A_1, A_2] \neq 0$, alors H a au moins une valeur propre dégénérée.
2. Démontrer que si $[A_1, A_2] = \alpha\mathbb{1}$, où α est un nombre complexe non nul alors toutes les valeurs propres sont au moins deux fois dégénérées.