

Mécanique Quantique I, Corrigé 6

Assistants : joseph.saliba@epfl.ch & pierre.lugan@epfl.ch

Exercice 1 : Principe d'incertitude dans l'expérience de Young

1. Soient l_1 et l_2 les chemins passant respectivement par la fente 1 et 2. En définissant l'origine de l'axe x au milieu des deux fentes, on a relié les différentes quantités en jeu :

$$l_1 \cos \theta_1 = d \quad l_1 \sin \theta_1 = x - \frac{a}{2} \quad (1)$$

$$l_2 \cos \theta_2 = d \quad l_2 \sin \theta_2 = x + \frac{a}{2} \quad (2)$$

Comme nous considérons l'approximation de faible déviation (*i.e.* $\theta_1, \theta_2 \ll 1$), les relations précédentes peuvent être approximées par les suivantes :

$$l_1 \left(1 - \frac{\theta_1^2}{2}\right) = d \quad \theta_1 = \frac{x - \frac{a}{2}}{l_1} \quad (3)$$

$$l_2 \left(1 - \frac{\theta_2^2}{2}\right) = d \quad \theta_2 = \frac{x + \frac{a}{2}}{l_2} \quad (4)$$

On veut maintenant trouver la distance entre deux maxima de la distribution de probabilité sur la paroi. Pour ce faire, considérons que les deux fonctions d'ondes $\psi_1(x) = e^{ikl_1(x)}$ et $\psi_2(x) = e^{ikl_2(x)}$. Le principe de superposition nous dit que la fonction d'onde résultante est la somme des fonctions d'onde. On a alors que la distribution de probabilité est donnée par :

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) \quad \rightarrow \quad |\psi(x)|^2 = 2 + 2 \cos(k(l_2 - l_1)) \quad (5)$$

On voit donc que les maxima de $|\psi(x)|^2$ apparaissent lorsque $k(l_2 - l_1) = 2\pi N$ avec $N \in \mathbb{Z}$. La distance entre deux maxima est donc donnée par la condition :

$$l_2 - l_1 = \lambda \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (6)$$

En utilisant les expressions de gauche de (3) et (4), cette condition se réécrit aisément :

$$l_2 - l_1 \simeq \frac{d}{2}(\theta_2^2 - \theta_1^2) = \lambda \quad (7)$$

En utilisant maintenant les expressions de droite de (3) et (4), on obtient :

$$\frac{d}{2} \left[\frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2}{l_2^2} - \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{l_1^2} \right] = \lambda$$

A l'ordre le plus bas en θ_i , on peut approximer $1/l_i^2$ par :

$$\frac{1}{l_i^2} = \frac{(1 - \theta_i^2/2)^2}{d^2} \simeq \frac{1}{d^2}$$

On trouve donc finalement que la distance x entre deux maxima est donnée par :

$$\boxed{x_{\text{int}} \simeq \frac{\lambda d}{a}} \quad (8)$$

Remarque : ce résultat s'établit aussi facilement sans introduction explicite des angles ; en imposant une différence de chemin $\lambda = l_2 - l_1$, on peut écrire

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{l_2 - l_1}{d} = \frac{\sqrt{d^2 + (x_{\text{int}} + \frac{a}{2})^2} - \sqrt{d^2 + (x_{\text{int}} - \frac{a}{2})^2}}{d} = \sqrt{1 + \frac{(x_{\text{int}} + \frac{a}{2})^2}{d^2}} - \sqrt{1 + \frac{(x_{\text{int}} - \frac{a}{2})^2}{d^2}}, \quad (9)$$

ce qui pour $x_{\text{int}}, a \ll d$ se développe en

$$\frac{\lambda}{d} \simeq \frac{1}{2d^2} \left[\left(x_{\text{int}} + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(x_{\text{int}} - \frac{a}{2}\right)^2 \right] = \frac{x_{\text{int}} a}{d^2}. \quad (10)$$

2. L'impulsion transférée à la plaque dépend de la fente par laquelle le photon est passé : s'il est passé par la fente 1 alors la quantité de mouvement transférée est $p_1 = -\frac{h\nu}{c} \sin \theta_1$ alors que s'il est passé par la seconde fente la quantité de mouvement serait $p_2 = -\frac{h\nu}{c} \sin \theta_2$. La différence est donc donnée par :

$$|p_2 - p_1| = \frac{h\nu}{c} |\sin \theta_2 - \sin \theta_1| \quad (11)$$

3. Si l'on veut pouvoir discriminer entre p_1 et p_2 , il faut que notre incertitude sur l'impulsion verticale de la plaque Δp satisfasse :

$$\Delta p \ll |p_2 - p_1| \quad (12)$$

Par le principe d'incertitude de Heisenberg, l'incertitude correspondante sur la position de la plaque est :

$$\Delta x \gg \frac{\hbar}{2|p_2 - p_1|} \quad (13)$$

Pour de petites déviations (*i.e.* $\theta_1, \theta_2 \ll 1$), on trouve en utilisant à nouveau les relations de gauche de (3) et (4) :

$$|p_2 - p_1| \simeq \frac{h\nu}{c} |\theta_2 - \theta_1| \simeq \frac{ha}{\lambda d} \quad (14)$$

L'incertitude sur la position si l'on veut être capable de discriminer par quelle fente le photon est passé est donc caractérisée par :

$$\Delta x \gg \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda d}{a} = \frac{1}{4\pi} x_{\text{int}} \quad (15)$$

On trouve donc que la position des fentes 1 et 2 est définie avec une incertitude supérieure à l'interfrange : on ne peut donc pas observer d'interférence. Il faut se souvenir que pour obtenir une description cohérente du système, il faut appliquer la mécanique quantique à tous les systèmes en jeu !

Exercice 2 : Le système à deux niveaux

1. \hat{H}_0 étant diagonal, la base choisie est celle des vecteurs propres. Les vecteurs propres sont donc donnés par les vecteurs de base :

$$|\phi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |\phi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

2. Afin que la matrice \hat{H} décrive un Hamiltonien, il faut qu'elle satisfasse $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$ et donc $\hat{W}^\dagger = \hat{W}$. Au niveau des éléments de matrice, on obtient $W_{ij} = W_{ji}^*$. Cela implique donc que la matrice \hat{W} est contrainte à la forme suivante :

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} e^{i\chi} \\ W_{12} e^{-i\chi} & W_{22} \end{pmatrix} \quad (17)$$

où W_{11}, W_{12}, W_{22} et $\chi \in \mathbb{R}$.

3. Les valeurs propres de \hat{H} sont données par

$$E'_{1,2} = \frac{1}{2} \text{Tr} \hat{H} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(E_1 + W_{11} - E_2 - W_{22})^2 + 4|W_{12}|^2}, \quad (18)$$

où $\text{Tr} \hat{H}$ sert ici seulement à la réécriture compacte de la somme $W_{11} + W_{22}$ (on notera néanmoins que la trace d'une matrice est invariante sous changement de base, au même titre que les valeurs propres).

4. Dans les deux cas :

$$\Sigma = E_1 + E_2 \quad , \quad \Delta = |E_1 - E_2| \quad (19)$$

Pour le reste :

I. Les valeurs propres sont données par :

$$E'_{I;1,2} = \frac{1}{2} \text{Tr} \hat{H}_0 \pm \frac{1}{2} \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4\alpha^2} \quad (20)$$

et donc :

$$\begin{aligned} \Sigma' &= \Sigma \\ \Delta' &= \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4\alpha^2} \geq \Delta \end{aligned} \quad (21)$$

Le fait que $\Delta' > \Delta$ est un phénomène connu sous le nom de "répulsion des niveaux" (level repulsion) qui stipule que si l'on couple deux niveaux, l'écart d'énergie grandit.

II. Les valeurs propres sont données par :

$$E'_{II;1,2} = \frac{1}{2} \text{Tr} \hat{H}_0 \pm \frac{1}{2} (E_1 - E_2 + 2\beta) = \{E_1 + \beta, E_2 - \beta\} \quad (22)$$

et donc :

$$\begin{aligned} \Sigma' &= \Sigma \\ \Delta' &= |E_1 - E_2 + 2\beta| \end{aligned} \quad (23)$$

Dans ce cas, on peut aussi bien avoir $\Delta' > \Delta$ que $\Delta' < \Delta$.

5. Considérons à présent notre modèle minimal pour l'atome d'azote dans la molécule d'ammoniac.

(a) Nous avons choisi de nous mettre dans la base des états "en-dessus" et "en-dessous". Il n'est pas certain que ce soient des vecteurs propres du Hamiltonien, qui n'est donc pas nécessairement diagonal. Par contre, nous savons qu'échanger ces deux vecteurs ne change rien à la physique, et donc :

$$H_{11} = H_{22} \quad , \quad H_{12} = H_{21} \quad (24)$$

Le Hamiltonien le plus général est alors donné par :

$$\hat{H}_{NH_3} = \begin{pmatrix} E & \omega \\ \omega & E \end{pmatrix} \quad (25)$$

avec $E, \omega \in \mathbb{R}$.

(b) L'opérateur \hat{P} est défini par son action sur les vecteurs de base, ce qui donne :

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} +a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \quad (26)$$

(c) Notre Hamiltonien est donné par :

$$\hat{H}'_{NH_3} = \begin{pmatrix} E + \beta & \gamma \\ \gamma & E - \beta \end{pmatrix} \quad (27)$$

où $\gamma = \omega + \alpha$.

— Les valeurs propres sont donc données par :

$$E'_{NH_3\pm} = E \pm \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \quad (28)$$

— Concernant les vecteurs propres, il vaut la peine de s'y pencher d'un peu plus près pour d'une part apprendre quelques "trucs" qui peuvent s'avérer utiles, et d'autre part avoir une meilleure vision des différents termes.

Pour commencer, il est clair que E ne va pas intervenir, vu qu'il multiplie simplement la matrice identité. Et, en effet, le système à résoudre est donné par :

$$\begin{pmatrix} \beta \mp \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} & \gamma \\ \gamma & -\beta \mp \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad (29)$$

Pour simplifier les calculs, il serait agréable de pouvoir se débarrasser de la racine. Vu qu'elle est donnée par le carré de deux termes, il faut introduire des fonctions trigonométriques. Pour $\gamma = 0$, le Hamiltonien est diagonal, afin d'en tenir compte on définit notre angle θ par :

$$\tan(\theta) = \frac{\gamma}{\beta} \quad (30)$$

et donc $\gamma = 0 \Rightarrow \theta = 0$. L'équation ci-dessus est alors donnée par :

$$\frac{\beta}{\cos(\theta)} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \mp 1 & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \mp 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad (31)$$

D'où l'on tire :

$$\frac{x}{y} = -\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) \mp 1} \quad (32)$$

Cette expression ne semble pas particulièrement agréable à manipuler. Pourtant, en regardant le dénominateur de plus près on devrait penser aux relations trigonométriques suivantes :

$$\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi) = 2\cos^2(\phi) - 1 \quad \& \quad \sin(2\phi) = 2\sin(\phi)\cos(\phi) \quad (33)$$

qui nous amènent à introduire $\phi = \theta/2$ et donc :

$$\frac{x}{y} = \begin{cases} \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)} \\ -\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} \end{cases} \quad (34)$$

ce qui donne les vecteurs propres :

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} \\ |-\rangle &= \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\tan(2\phi) = \frac{\omega + \alpha}{\beta}$$

qui sont bien orthonormés.

— Trouver la valeur de la position devient à présent simple :

$$\begin{aligned} \langle \hat{P} \rangle_{|+\rangle} &= \langle + | \hat{P} | + \rangle = (\cos(\phi), \sin(\phi)) \begin{pmatrix} +a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} \\ &= a [\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)] = a [2\cos^2(\phi) - 1] \\ \langle \hat{P} \rangle_{|-\rangle} &= \langle - | \hat{P} | - \rangle = -a [2\cos^2(\phi) - 1] = -\langle \hat{P} \rangle_{|+\rangle} \end{aligned} \quad (36)$$

- A chaque mesure de la position, on ne peut obtenir que $\pm a$, les valeurs ci-dessus donnent la moyenne statistique de ces mesures.

Exercice 3 : Règles de commutations et dégénérescence

On désigne par A_1 , A_2 et H trois opérateurs hermitiques dans un espace de Hilbert. On suppose qu'ils satisfont aux règles de commutation suivantes :

$$[A_1, H] = 0 \quad \text{et} \quad [A_2, H] = 0 \quad (37)$$

1. Nous souhaitons tout d'abord montrer que si $[A_1, A_2] \neq 0$, H a au moins une valeur propre dégénérée. Pour ce faire, il est plus simple de procéder par l'absurde. Si l'on suppose que toutes les valeurs propres de H sont non dégénérées, il n'existe donc qu'une seule base de vecteurs propres de H (pour laquelle les vecteurs sont naturellement définis à un facteur scalaire près).

Comme A_1 et A_2 commutent avec H , ils possèdent une base de vecteurs propres commune avec H . Comme H n'en possède qu'une, c'est donc la même pour A_1 et A_2 . On arrive donc à la conclusion que A_1 et A_2 sont diagonaux dans la même base. Ceci implique que ces opérateurs commutent, ce qui contredit l'hypothèse. Il n'est donc pas possible que toutes les valeurs propres de H soient non dégénérées !

(Si, au contraire, H possède une valeur propre dégénérée, associée à au moins deux vecteurs propres $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$, toutes les combinaisons linéaires de ces deux vecteurs sont toujours des vecteurs propres de H . Il est donc possible que A_1 et A_2 aient chacun une base commune de vecteurs propres avec H , mais que ces deux bases soient différentes. Elles peuvent en effet contenir des combinaisons linéaires différentes de $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$. Il est alors possible que A_1 et A_2 ne commutent pas.)

2. Voyons maintenant que dans le cas particulier où $[A_1, A_2] = \alpha \mathbb{1}$, où α est un nombre complexe non nul toutes les valeurs propres sont au moins deux fois dégénérées. Puisque nous sommes dans le cadre du point 1., nous savons déjà qu'il existe au moins une valeur propre de H dégénérée.

Raisonnons à nouveau par l'absurde. On suppose que H possède une valeur propre non dégénérée ϵ associée à un vecteur propre $|\psi\rangle$. Comme $[H, A_1] = 0$, on a :

$$H(A_1|\psi\rangle) = A_1H|\psi\rangle = \epsilon(A_1|\psi\rangle) \quad (38)$$

et donc $A_1|\psi\rangle$ est un vecteur propre de H avec valeur propre ϵ . De la même manière, on montre que $A_2|\psi\rangle$ est un vecteur propre de H avec valeur propre ϵ .

Comme cette valeur propre est supposée non dégénérée, ces vecteurs sont donc égaux à $|\psi\rangle$ (à un facteur scalaire près). On a donc

$$A_1|\psi\rangle = \lambda_1|\psi\rangle \quad \text{et} \quad A_2|\psi\rangle = \lambda_2|\psi\rangle \quad \rightarrow \quad [A_1, A_2]|\psi\rangle = 0 \neq \alpha|\psi\rangle \quad (39)$$

Le fait que le vecteur propre (associé à la valeur propre non dégénérée de H), soit à la fois vecteur propre de A_1 et de A_2 contredit donc l'hypothèse de départ ! Ainsi il n'est pas possible que H possède une valeur propre non dégénérée.

Notez que dans le cas plus général de $[A_1, A_2] = B$, avec B un opérateur non trivial, on ne peut pas appliquer la démonstration ci-dessus, comme il peut bien s'agir que $B|\psi\rangle = 0$ pour quelque $|\psi\rangle$. Donc seulement la démonstration 1 est applicable.