Mécanique Quantique I, Série 7

Assistants : joseph.saliba@epfl.ch & pierre.lugan@epfl.ch

Exercice 1 : Fonctions d'onde excitées de l'oscillateur harmonique

Considérons un oscillateur harmonique isotrope à une dimension. Nous nous proposons de faire le lien entre les deux méthodes de résolution vues en cours pour l'oscillateur harmonique : la résolution explicite de l'équation de Schrödinger et la méthode utilisant les opérateurs d'échelle $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$. Nous avons vu en cours que la fonction d'onde non dégénérée du fondamental s'écrit :

$$\varphi_0(x) = \langle x|\varphi_0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

1. Écrire le hamiltonien de l'oscillateur harmonique. Donner la forme de sa représentation x. Faire un changement de variable $q(x)$ tel que $\varphi_0(q) = \chi e^{-q^2/2}$. Comment le hamiltonien change-t-il ?
2. Appliquer le hamiltonien sur l'état φ_0 et déterminer sa valeur propre.
3. En appliquant l'opérateur création $a^\dagger$ sur $\varphi_0(x)$, déterminer les fonctions d'onde des deux premiers états excités.
4. Sachant que les polynômes de Hermite peuvent s'écrire sous la forme :

$$H_n(q) = e^{q^2/2}\left(q - \frac{\partial}{\partial q}\right)^n e^{-q^2/2}$$

   établir la relation $\varphi_n(q) \propto H_n(q)\varphi_0(q)$ et déterminer le coefficient de proportionnalité. Vérifier que les deux fonctions d'onde trouvées au point précédent satisfont cette relation.
5. Nous voulons à présent tracer l'allure des fonctions d'onde $\varphi_0(q)$, $\varphi_1(q)$ et $\varphi_2(q)$. Calculer les $\varphi_i(q=0)$, ainsi que les points où s'annulent ces fonctions et tracer leur allure.
6. A quoi correspondent les intégrales suivantes ? En déduire leur valeur, sans effectuer l'intégrale !

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{m\omega}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

Exercice 2 : Vecteurs propres de l'opérateur position et états propres de l'OH

Nous nous proposons maintenant de retrouver les fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique en utilisant les propriétés des vecteurs propres de l'opérateur position définis comme :

$$\hat{x}\,|x\rangle = x\,|x\rangle$$

1. En utilisant la définition de l'opérateur position en fonction des opérateurs d'échelle $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$, calculer son action sur un état propre $|\varphi_n\rangle$ de $\hat{H}$. En déduire la valeur de $\langle x|\hat{x}|\varphi_n\rangle$.
2. En déduire une relation de récurrence sur les $\langle x|\varphi_n\rangle = \varphi_n(x)$.
3. En faisant le changement de variables $q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ ainsi que le changement de fonction $h_n(q) = \sqrt{2^n n!}\frac{\langle x|\varphi_n\rangle}{\langle x|\varphi_0\rangle}$, réexprimer la relation de récurrence. Comparer cette relation de récurrence à celle qui est satisfaite par les polynômes de Hermite [$H_{n+1}(X) = 2XH_n(X) - 2nH_{n-1}(X)$, avec $H_0(X) = 1$, $H_1(X) = 2X$]. En déduire la forme des $\langle x|\varphi_n\rangle$.