Mécanique Quantique I, Série 8

Assistants : joseph.saliba@epfl.ch & pierre.lugan@epfl.ch

Exercice 1 : Commutateurs et fonctions d'observables

Dans cet exercice, nous allons considérer deux observables $\hat{A}$ et $\hat{B}$ qui commutent avec leur commutateur, *i.e.* $[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = [\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]] = 0$. On définit les fonctions d'opérateurs par leur développement en série. On a donc par exemple :

$$e^{\hat{A}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^n}{n!} \tag{1}$$

1. Montrer que les opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$ satisfont la relation suivante :

$$[\hat{A}^n, \hat{B}] = n\hat{A}^{n-1}[\hat{A},\hat{B}] \tag{2}$$

   En déduire la valeur de $[e^{\hat{A}}, \hat{B}]$.

2. Démontrer que $e^{\alpha\hat{A}}e^{\beta\hat{A}} = e^{(\alpha+\beta)\hat{A}}$ où α et β appartiennent à $\mathbb{R}$.
3. Montrer que les deux points précédents impliquent :

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}] \qquad \text{ainsi que} \qquad e^{\hat{A}}\hat{B}^n e^{-\hat{A}} = \Big(\hat{B} + [\hat{A},\hat{B}]\Big)^n \tag{3}$$

4. Peut-on appliquer le point 1. au cas des opérateurs de création et d'annihilation de l'oscillateur harmonique afin de calculer le commutateur suivant ?

$$[\hat{a}^n, \hat{a}^{\dagger m}] \qquad \text{sachant que} \qquad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \tag{4}$$

   Trouver un argument simple pour montrer que ce commutateur est non-nul, sans faire de calculs.

5. En utilisant encore les opérateurs d'échelle du point précédent, montrer les relations suivantes :

$$[f(\hat{a}), \hat{a}^\dagger] = f'(\hat{a}) \qquad \text{et} \qquad [\hat{a}, g(\hat{a}^\dagger)] = g'(\hat{a}^\dagger) \tag{5}$$

6. Considérer la fonction $f(x) = e^{\hat{A}x}$ où $x \in \mathbb{R}$. Calculer sa dérivée par rapport à x. Considérer ensuite la fonction $g(x) = e^{\hat{A}x}e^{\hat{B}x}$ et montrer que sa dérivée par rapport à x peut s'écrire comme :

$$g'(x) = (\hat{A} + \hat{B} + x[\hat{A},\hat{B}])g(x) \tag{6}$$

7. Montrer que la fonction $h(x) = e^{(\hat{A}+\hat{B})x}e^{\frac{x^2}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$ satisfait elle aussi $h'(x) = (\hat{A}+\hat{B}+x[\hat{A},\hat{B}])h(x)$. En déduire que $g(x) = h(x)$ et la valeur de $e^{\hat{A}+\hat{B}}$.
8. Déduire du point précédent que $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}e^{[\hat{A},\hat{B}]}$.

Considérons maintenant le cas un peu plus compliqué où on prend l'exponentielle d'une somme d'opérateurs ne commutant pas : soit $\hat{A} = A^a\hat{T}^a$ (où la sommation est implicite) et $[\hat{T}^a, \hat{T}^b] \neq 0$. Notez bien que A^a est une façon formelle de désigner la a composante du vecteur A, et non pas sa a ième puissance.

9. Montrer que la dérivée de $e^{\hat{A}}$ par rapport à A^a est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial A^a} e^{\hat{A}} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^n\hat{T}^a\hat{A}^m}{(n+m+1)!} \tag{7}$$

Exercice 2 : Opérateur de translation et états cohérents

Introduisons l'opérateur unitaire $\hat{U}(a) = e^{-\frac{ia\hat{p}}{\hbar}}$ où $a \in \mathbb{R}$. Il satisfait donc $\hat{U}^\dagger(a)\hat{U}(a) = 1$.

1. En utilisant l'exercice précédent, déterminer la valeur de $[\hat{U}(a), \hat{x}]$. En déduire que $\hat{U}(a)$ est le générateur des translations, dans le sens que
$$\hat{U}(a)|x\rangle = |x+a\rangle \tag{8}$$
2. En appliquant le résultat précédent au cas où a est infinitésimal, montrer que l'on peut écrire :
$$\langle x|\hat{U}^\dagger(a)|\varphi\rangle = \varphi(x+a) \qquad \rightarrow \qquad \langle x|\hat{p}|\varphi\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x) \tag{9}$$
3. Considérons maintenant un état cohérent. On le décompose sur la base des vecteurs propres du hamiltonien de l'oscillateur harmonique (cf. Série 5) :
$$|z\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}|\varphi_n\rangle \tag{10}$$
On a vu que $c_0 = e^{-|z|^2/2}$. Montrer que l'on peut récrire l'état cohérent sous la forme compacte suivante :
$$|z\rangle = e^{(z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a})}|\varphi_0\rangle \tag{11}$$
On utilisera pour cela les relations de l'exercice précédent en vérifiant les domaines d'applicabilité.
4. Calculer la fonction d'onde $z(x) = \langle x|z\rangle$. Explicitez son lien avec la fonction d'onde $\varphi_0(x)$ de l'oscillateur harmonique simple.