Mécanique Quantique I, Corrigé 8

Assistants : joseph.saliba@epfl.ch & pierre.lugan@epfl.ch

Exercice 1 : Commutateurs et fonctions d'observables

1. Montrons cette relation par récurrence. Elle est trivialement vraie pour $n = 1$. Supposons donc que l'identité suivante soit vraie :

$$[\hat{A}^{n-1}, \hat{B}] = (n-1)\hat{A}^{n-2}[\hat{A}, \hat{B}] \tag{1}$$

Calculons donc maintenant $[\hat{A}^n, \hat{B}]$ en utilisant $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$:

$$\begin{aligned} [\hat{A}^n, \hat{B}] &= \hat{A}[\hat{A}^{n-1}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{A}^{n-1} \\ &= (n-1)\hat{A}^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{A}^{n-1} \\ &= n\hat{A}^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}] \end{aligned} \tag{2}$$

où l'on a utilisé que $\hat{A}$ commute avec $[\hat{A}, \hat{B}]$. Le commutateur $[e^{\hat{A}}, \hat{B}]$ s'exprime aisément à l'aide de ce résultat :

$$[e^{\hat{A}}, \hat{B}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[\hat{A}^n, \hat{B}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}\hat{A}^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}] = e^{\hat{A}}[\hat{A}, \hat{B}] \tag{3}$$

2. Voyons maintenant que $e^{\alpha\hat{A}}e^{\beta\hat{A}} = e^{(\alpha+\beta)\hat{A}}$. Pour cela, développons les deux exponentielles en série :

$$e^{\alpha\hat{A}}e^{\beta\hat{A}} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\alpha^m\beta^n\hat{A}^{m+n}}{m!n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\hat{A}^k \sum_{n=0}^{k} \frac{\alpha^{k-n}\beta^n}{(k-n)!n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^k}{k!} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \alpha^{k-n}\beta^n \tag{4}$$

Notez que l'on a réécrit la somme sur m et n comme une somme sur $k = m + n$ qui peut prendre des valeurs entre zéro et l'infini et sur n qui prend ses valeurs entre zéro et k. La somme sur n n'est rien d'autre que l'application de la formule du binôme de Newton à $(\alpha + \beta)^k$ et le résultat est démontré ! En particulier, on a $e^{\hat{A}}e^{-\hat{A}} = 1$.

3. On a vu au premier point que $[e^{\hat{A}}, \hat{B}] = e^{\hat{A}}[\hat{A}, \hat{B}]$. Explicitons le terme de gauche, et multiplions à droite par $e^{-\hat{A}}$. On obtient alors immédiatement :

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] \tag{5}$$

où l'on a utilisé le fait que $\hat{A}$ commute avec $[\hat{A}, \hat{B}]$. Si l'on élève les deux côtés de l'égalité précédente à la puissance n on obtient immédiatement :

$$e^{\hat{A}}\hat{B}^n e^{-\hat{A}} = \Big(\hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}]\Big)^n \tag{6}$$

où l'on a utilisé $e^{-\hat{A}}e^{\hat{A}} = 1$ pour simplifier le terme de gauche.

4. Afin de pouvoir utiliser le point 1. il faut s'assurer que les opérateurs commutent avec leur commutateur. Prenons donc $\hat{A} = \hat{a}$ et $\hat{B} = \hat{a}^{\dagger m}$. Voyons si l'identité $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ est vérifiée. Pour cela, il nous faut tout d'abord calculer $[\hat{A}, \hat{B}]$:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{a}, \hat{a}^{\dagger m}] = m\hat{a}^{\dagger m-1} \tag{7}$$

où nous avons appliqué le point 1. puisque $\hat{a}^\dagger$ commute avec $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$. Nous pouvons donc maintenant calculer $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]$:

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{a}, [\hat{a}, \hat{a}^{\dagger m}]] = m[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger m-1}] = m(m-1)\hat{a}^{\dagger m-2} \neq 0 \tag{8}$$

On en déduit donc que l'on ne peut pas appliquer immédiatement la formule du point 1. pour calculer le commutateur $[\hat{a}^n, \hat{a}^{\dagger m}]$. On peut par contre procéder récursivement.

Une façon simple de voir que ce commutateur est non-nul est de l'appliquer à l'état fondamental de l'oscillateur harmonique $|\varphi_0\rangle$. Cet état est caractérisé par le fait que $a|\varphi_0\rangle = 0$. On trouve donc $[\hat{a}^n, \hat{a}^{\dagger m}]|\varphi_0\rangle = \hat{a}^n \hat{a}^{\dagger m}|\varphi_0\rangle$. Comme cette quantité n'est pas nécessairement nulle, on déduit $[\hat{a}^n, \hat{a}^{\dagger m}] \neq 0$.

5. Écrivons tout d'abord les fonctions f et g en série : $f(\hat{a}) = \sum_n \alpha_n \hat{a}^n$ et $g(\hat{a}^\dagger) = \sum_n \beta_n \hat{a}^{\dagger n}$. On a alors

$$[f(\hat{a}), \hat{a}^\dagger] = \sum_n \alpha_n [\hat{a}^n, \hat{a}^\dagger] = \sum_n \alpha_n n \hat{a}^{n-1}[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = f'(\hat{a}) \tag{9}$$

La seconde relation se montre de même manière.

6. On considère $f(x) = e^{\hat{A}x}$ où $x \in \mathbb{R}$. Calculons sa dérivée par rapport à x :

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{\hat{A}x} = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{A}^n x^n}{n!} = \hat{A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{A}^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} = \hat{A} e^{\hat{A}x} \tag{10}$$

Voyons maintenant la dérivée de $g(x) = e^{\hat{A}x} e^{\hat{B}x}$:

$$g'(x) = \left(\frac{d}{dx} e^{\hat{A}x} \right) e^{\hat{B}x} + e^{\hat{A}x} \left(\frac{d}{dx} e^{\hat{B}x} \right) = \hat{A} g(x) + g(x)\hat{B} = (\hat{A} + \hat{B}) g(x) + [g(x), \hat{B}] \tag{11}$$

où l'on a utilisé qu'un opérateur commute avec toute fonction de ce même opérateur. Voyons maintenant le dernier terme de l'égalité précédente :

$$[g(x), \hat{B}] = [e^{\hat{A}x}, \hat{B}] e^{\hat{B}x} = e^{\hat{A}x} x [\hat{A}, \hat{B}] e^{\hat{B}x} = x[\hat{A}, \hat{B}] g(x) \tag{12}$$

On a donc montré que $g'(x) = (\hat{A} + \hat{B} + x[\hat{A}, \hat{B}]) g(x)$.

7. Considérons maintenant la fonction $h(x) = e^{(\hat{A}+\hat{B})x} e^{\frac{x^2}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$ et calculons sa dérivée par rapport à x. Comme auparavant, la dérivée du produit s'exprime comme :

$$h'(x) = (\hat{A} + \hat{B}) h(x) + e^{(\hat{A}+\hat{B})x} x [\hat{A}, \hat{B}] e^{\frac{x^2}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \tag{13}$$

Comme $\hat{A}$ et $\hat{B}$ commutent avec leur commutateur, on obtient finalement $h'(x) = (\hat{A} + \hat{B} + x[\hat{A}, \hat{B}]) h(x)$.

Nous avons donc montré que $g(x)$ et $h(x)$ satisfont à la même équation différentielle du premier ordre. Comme une telle équation admet une unique solution, on en déduit que $g(x) \propto h(x)$. Afin de fixer le coefficient de proportionnalité, il suffit d'évaluer g et h en $x = 0$ par exemple. On obtient $g(0) = 1$ et $h(0) = 1$ d'où l'on tire $\alpha = 1$. On a donc montré que

$$e^{\hat{A}x} e^{\hat{B}x} = e^{(\hat{A}+\hat{B})x} e^{\frac{x^2}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \tag{14}$$

Évaluée en $x = 1$ cette relation donne :

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \tag{15}$$

8. Du point précédent, on a :

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} = e^{\hat{B}+\hat{A}} = e^{\hat{B}} e^{\hat{A}} e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \tag{16}$$

En multipliant à droite par $e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$ on trouve le résultat désiré.

9. Pour ce dernier calcul, nous allons expliciter les premiers termes du développement afin de comprendre la structure du résultat. On a donc

$$\begin{aligned} e^{\hat{A}} &= 1 + \hat{A} + \frac{1}{2!}\hat{A}^2 + \frac{1}{3!}\hat{A}^3 + \dots \\ &= 1 + A^b \hat{T}^b + \frac{1}{2!} A^b A^c \hat{T}^b \hat{T}^c + \frac{1}{3!} A^b A^c A^d \hat{T}^b \hat{T}^c \hat{T}^d + \dots \end{aligned} \tag{17}$$

Prenons maintenant la dérivée par rapport à A^a de cette quantité :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial A^a} e^{\hat{A}} &= \hat{T}^a + \frac{1}{2!}\left(\hat{T}^a\hat{A} + \hat{A}\hat{T}^a\right) + \frac{1}{3!}\left(\hat{T}^a\hat{A}^2 + \hat{A}\hat{T}^a\hat{A} + \hat{A}^2\hat{T}^a\right) + \dots \\
&= \hat{T}^a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^m}{(m+1)!} + \hat{A}\hat{T}^a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^m}{(m+2)!} + \hat{A}^2\hat{T}^a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^m}{(m+3)!} + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}^n\hat{T}^a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^m}{(m+n+1)!} \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^n\hat{T}^a\hat{A}^m}{(n+m+1)!}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Notez que l'on retrouve le résultat habituel dans le cas où les $\hat{T}^a$ commutent entre eux. En effet, dans ce cas, la formule précédente s'écrit simplement :

$$
\hat{T}^a \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^{n+m}}{(n+m+1)!} = \hat{T}^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^k}{(k+1)!} \sum_{n=0}^{k} 1 = \hat{T}^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^k}{k!} = \hat{T}^a e^{\hat{A}} \tag{19}
$$

On retrouve bien le résultat dérivé à l'équation (10) !

Exercice 2 : Opérateur de translation et états cohérents

1. De l'exercice précédent, nous savons que $[\hat{A}^n, \hat{B}] = n\hat{A}^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}]$ si $\hat{A}$ commute avec $[\hat{A}, \hat{B}]$. Dans cet exercice, nous voulons calculer le commutateur de $\hat{U}(a)$ avec $\hat{x}$ où $\hat{U}(a) = e^{-\frac{ia\hat{p}}{\hbar}}$. Nous avons :

$$
[\hat{U}(a), \hat{x}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ia/\hbar)^n}{n!}[\hat{p}^n, \hat{x}] \tag{20}
$$

On identifie donc $\hat{A} = \hat{p}$ et $\hat{B} = \hat{x}$. Comme $\hat{p}$ commute avec $[\hat{p}, \hat{x}]$, on peut utiliser le résultat de l'exercice 1. On obtient donc :

$$
[\hat{U}(a), \hat{x}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ia)^n}{(n-1)!}\hat{p}^{n-1}(-i) = -a\hat{U}(a) \tag{21}
$$

Voyons ce que donne l'application de l'opérateur $\hat{x}$ sur le vecteur d'état $\hat{U}(a)|x\rangle$:

$$
\hat{x}\hat{U}(a)|x\rangle = \hat{U}(a)\hat{x}|x\rangle - [\hat{U}(a), \hat{x}]|x\rangle = (x+a)\hat{U}(a)|x\rangle \tag{22}
$$

On constate que $\hat{U}(a)|x\rangle$ est un vecteur propre de l'opérateur de position avec valeur propre $x+a$. On a donc $\hat{U}(a)|x\rangle \propto |x+a\rangle$. Comme $\hat{U}(a)$ est un opérateur unitaire, la norme de $|x+a\rangle$ est la même que celle de $|x\rangle$. On en déduit donc que

$$
\hat{U}(a)|x\rangle = |x+a\rangle \tag{23}
$$

L'opérateur $\hat{U}(a)$ est appelé opérateur générateur des translations.

2. En prenant l'adjointe de l'équation précédente on trouve $\langle x|\hat{U}^\dagger(a) = \langle x+a|$ et donc :

$$
\langle x|\hat{U}^\dagger(a)|\varphi\rangle = \langle x+a|\varphi\rangle = \varphi(x+a) \tag{24}
$$

Si a est infinitésimal, on peut approximer les quantités suivantes au premier ordre en a :

$$
\hat{U}^\dagger(a) \simeq 1 + \frac{ia\hat{p}}{\hbar} \qquad \text{et} \qquad \varphi(x+a) \simeq \varphi(x) + \varphi'(x)a \tag{25}
$$

En injectant ces quantités dans l'équation précédente, on trouve immédiatement :

$$\langle x|\hat{p}|\varphi\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x) \tag{26}$$

Notez que cette méthode permet de trouver la valeur de $\langle x|\hat{p}^n|\varphi\rangle$ quelque soit n : il suffit de faire le développement de Taylor de l'équation (24) et d'identifier les puissances de a. On obtient ainsi :

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x+a) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\varphi(x) \\ \langle x|\hat{U}^\dagger(a)|\varphi\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ia/\hbar)^n}{n!}\langle x|\hat{p}^n|\varphi\rangle \end{aligned}\right\} \quad\rightarrow\quad \langle x|\hat{p}^n|\varphi\rangle = (-i\hbar)^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}\varphi(x) \tag{27}$$

On retrouve ainsi par exemple :

$$\langle x|\frac{\hat{p}^2}{2m}|\varphi\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x) \tag{28}$$

3. Un état cohérent $|z\rangle$ s'écrit sur la base des vecteurs propres du hamiltonien de l'oscillateur harmonique comme :

$$|z\rangle = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|\varphi_n\rangle = e^{-|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z\hat{a}^\dagger)^n}{n!}|\varphi_0\rangle = e^{-|z|^2/2}e^{z\hat{a}^\dagger}|\varphi_0\rangle \tag{29}$$

On se propose de montrer que cette notation est équivalente à $|z\rangle = e^{(z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a})}|\varphi_0\rangle$. On se rappelle que $[\hat{a}^\dagger,\hat{a}] = -\mathbb{1}$. On a, d'après l'exercice précédent :

$$e^{(z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a})} = e^{z\hat{a}^\dagger}e^{-z^*\hat{a}}e^{\frac{|z|^2}{2}[\hat{a}^\dagger,\hat{a}]} = e^{z\hat{a}^\dagger}e^{-z^*\hat{a}}e^{-\frac{|z|^2}{2}} \tag{30}$$

On a presque fini. Il suffit désormais de remarquer la chose suivante : l'action de l'opérateur d'annihilation $\hat{a}$ sur le ket $|\varphi_0\rangle$ donne 0. Du terme $e^{-z^*\hat{a}}$ ne reste donc que le premier terme de la série de Taylor, et on a bien le résultat suivant :

$$|z\rangle \ = e^{(z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a})}|\varphi_0\rangle \ = e^{-\frac{|z|^2}{2}}e^{z\hat{a}^\dagger}|\varphi_0\rangle \ = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z\hat{a}^\dagger)^n}{n!}|\varphi_0\rangle \tag{31}$$

4. Pour finir, on calcule la fonction d'onde $z(x) = \langle x|z\rangle$. On décompose les opérateurs création annihilation sur les opérateurs position impulsion (on pose, par soucis de simplicité, $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}$ et $\beta = \sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}$) :

$$z\hat{a}^\dagger = z(\alpha\hat{x} - i\beta\hat{p}) \qquad || \qquad z^*\hat{a} = z^*(\alpha\hat{x} + i\beta\hat{p}) \tag{32}$$

D'où l'on tire :

$$\begin{aligned} \langle x|z\rangle \ &= \langle x|e^{2i\alpha\hat{x}\Im(z) - 2i\beta\hat{p}\Re(z)}|\varphi_0\rangle \ = e^{-\frac{1}{4}(z^2-(z^*)^2)}\langle x|e^{2i\alpha\Im(z)\hat{x}}e^{-2i\beta\Re(z)\hat{p}}|\varphi_0\rangle & (33)\\ &= e^{-\frac{1}{4}(z^2-(z^*)^2)}e^{2i\alpha\Im(z)x}\varphi_0\left(x - 2\hbar\beta\Re(z)\right) & (34) \end{aligned}$$

On voit donc que la fonction d'onde de l'état cohérent est, à une phase et une normalisation près, la fonction d'onde de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique déplacée dans l'espace.