Mécanique Quantique I, Série complémentaire

Assistants : joseph.saliba@epfl.ch & pierre.lugan@epfl.ch

Exercice 1 : Barrière de potentiel, effet tunnel et interférences

On considère une particule de masse m dans le potentiel

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 & \text{région I} \\ V_0 & 0 \leq x \leq L & \text{région II} \\ 0 & x > L & \text{région III} \end{cases} \tag{1}$$

où V_0 est une constante, positive dans le cas d'un barrière, négative dans le cas d'un puits de potentiel.

1. On s'intéresse d'abord au cas de la barrière ($V_0 > 0$) et au régime d'effet tunnel, correspondant à la gamme d'énergie $0 < E < V_0$.
   (a) Justifier que les solutions de l'équation de Schrödinger dans ce régime se mettent sous la forme
   $$\psi(x) = \begin{cases} A_1 e^{ipx/\hbar} + B_1 e^{-ipx/\hbar} & x < 0 \\ A_2 e^{-\gamma x} + B_2 e^{\gamma x} & 0 \leq x \leq L \\ A_3 e^{ipx/\hbar} + B_3 e^{-ipx/\hbar} & x > L \end{cases}, \tag{2}$$
   où p et γ sont des fonctions de E et des paramètres du problème, que l'on explicitera.
   (b) Pour simplifier la discussion, on se borne à décrire les solutions incidentes par la gauche, pour lesquelles $B_3 = 0$. Ecrire les équations de raccordement aux interfaces en $x = 0$ et $x = L$, et les présenter sous la forme d'un système d'équations linéaires d'inconnues $\{A_2, B_1, B_2, A_3\}$ avec un membre inhomogène dépendant de A_1.
   (c) Résoudre ce système pour obtenir B_1 et A_3 en fonction de A_1. Calculer les coefficients de transmission et de réflexion en intensité $|t|^2 = |A_3/A_1|^2$ et $|r|^2 = |B_1/A_1|^2$. Commenter.
2. On s'intéresse maintenant aux solutions d'énergie $E > V_0 > 0$.
   (a) Sans refaire les calculs et en adaptant les résultats du régime d'effet tunnel, exprimer le coefficient de transmission en intensité $|t|^2$ en fonction de E et des autres paramètres du problème.
   (b) Observer qu'à E et V_0 fixés, ce coefficient de transmission en intensité est une fonction périodique de L, et comparer sa période à la longueur d'onde dans la région II, définie par $\lambda_2 = 2\pi\hbar/\sqrt{2m(E - V_0)}$. Donner une interprétation physique à ce résultat.
   (c) Que serait le coefficient de transmission dans la limite classique ?
   (d) La barrière peut-elle être transparente ($|t|^2 = 1$) ou opaque ($|r|^2 = 1$) et, si oui, sous quelles conditions ?
3. On considère maintenant le cas $V_0 < 0$, qui correspond au puits carré de profondeur finie. Calculer $|t|^2$ pour les solutions non liées ($E > 0$) et commenter ce résultat à la lumière de la question 2.