Mécanique Quantique I, Série 10

Assistants : joseph.saliba@epfl.ch & pierre.lugan@epfl.ch

Exercice 1 : Oscillateur harmonique 2D

On considère un oscillateur harmonique isotrope à deux dimensions, dont le hamiltonien est

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{\mathbf{r}}^2 \,,$$

où $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{x}, \hat{y})$ et $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y)$. On rappelle que les opérateurs $\hat{x}$ et $\hat{p}_x$ commutent avec les opérateurs $\hat{y}$ et $\hat{p}_y$.

1. Ecrire le lagrangien classique décrivant ce système, et trouver les quantités conservées (E et L_z) en utilisant les méthodes usuelles.
2. Montrer que l'on peut diviser $\hat{H}$ en deux oscillateurs unidimensionnels qui commutent.
3. En vous basant sur vos connaissances de l'oscillateur harmonique unidimensionnel, introduire les opérateurs de création et d'annihilation nécessaires à la description du système ($\hat{a}_x$, $\hat{a}_y$, $\hat{a}_x^\dagger$ & $\hat{a}_y^\dagger$).
   (a) Trouver toutes les relations de commutation entre ces opérateurs.
   (b) Exprimer $\hat{H}$ en fonction de ces opérateurs.
   (c) Donner l'ensemble des états propres du système ainsi que les valeurs propres associées.
   (d) Donner la dégénérescence des trois premiers niveaux d'énergie.

Cette description est complète, mais elle rend la lecture de la dégénérescence des niveaux d'énergie difficile. Il faudrait introduire un nouvel opérateur commutant avec $\hat{H}$ pour décrire ces dégénérescences.

4. Introduire l'opérateur moment cinétique $\hat{L}_z$ qui découle du point 1.
   (a) L'exprimer en fonction des opérateurs de création et d'annihilation définis ci-dessus.
   (b) Vérifier que $\hat{L}_z$ commute avec $\hat{H}$.
   (c) Pour les trois premiers niveaux d'énergie, trouver les états propres de $\hat{L}_z$.

Cette fois, chaque état est facile à identifier par son énergie et un nombre qui parcourt les différents états d'une même énergie. Mais, la diagonalisation des espaces propres faite au point précédent n'est pas des plus commodes, et le lien avec des états "élémentaires" n'est pas immédiat.

5. Du point précédent on retient que la dégénérescence est bien décrite par un opérateur qui combine les deux axes, c'est pourquoi nous introduisons :

$$\hat{a}_g = \frac{\hat{a}_x + i\hat{a}_y}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{a}_d = \frac{\hat{a}_x - i\hat{a}_y}{\sqrt{2}}$$

   Montrer en quoi ce choix est judicieux.
   (La réponse à cette question n'est pas triviale, et l'énoncé volontairement vague a pour but de vous permettre de prendre du recul par rapport aux petits calculs techniques.)