Mécanique Quantique I, Série 11

Assistants : joseph.saliba@epfl.ch & pierre.lugan@epfl.ch

Exercice 1 : Produit tensoriel de deux spins $\frac{1}{2}$

Nous considérons un système composé de deux spins $\frac{1}{2}$: $\hat{\boldsymbol{S}}_1$ et $\hat{\boldsymbol{S}}_2$ (on note en gras les vecteurs).

1. Rappeler la forme matricielle des opérateurs $\hat{S}_1^x$, $\hat{S}_1^y$ et $\hat{S}_1^z$, dans l'espace de Hilbert du spin S_1. Faire de même pour le spin S_2. On choisira dans les deux cas l'axe z comme direction de quantification.
2. Quelle est la dimension de l'espace de Hilbert du système total composé par les deux spins ? Donner une base $\mathcal{B}$ de cet espace.
3. On considère maintenant l'action des opérateurs $\hat{\boldsymbol{S}}_1$ et $\hat{\boldsymbol{S}}_2$ dans la base $\mathcal{B}$. On rappelle que, par extension, on définit dans cette base les opérateurs $\hat{\boldsymbol{S}}_1$ et $\hat{\boldsymbol{S}}_2$ tels que
$$\hat{S}_1^i \equiv \hat{S}_1^i \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}_2} \quad \text{et} \quad \hat{S}_2^i \equiv \mathbb{1}_{\mathcal{B}_1} \otimes \hat{S}_2^i \qquad (i = x, y, z)$$
avec $\mathbb{1}_{\mathcal{B}_i}$ l'opérateur identité dans la base $\mathcal{B}_i$. $\hat{\boldsymbol{S}}_1$ agit sur le spin 1 comme le ferait $\hat{\boldsymbol{S}}_1$ et sur le spin 2 comme l'identité, et $\hat{\boldsymbol{S}}_2$ sur le spin 2 comme $\hat{\boldsymbol{S}}_2$ et sur le spin 1 comme l'identité. Ainsi
$$\hat{\boldsymbol{S}}_1|\downarrow\uparrow\rangle = (\hat{\boldsymbol{S}}_1 \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}_2})(|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) = \hat{\boldsymbol{S}}_1|\downarrow\rangle \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}_2}|\uparrow\rangle$$
$$\hat{\boldsymbol{S}}_2|\uparrow\downarrow\rangle = (\mathbb{1}_{\mathcal{B}_1} \otimes \hat{\boldsymbol{S}}_2)(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle) = \mathbb{1}_{\mathcal{B}_1}|\uparrow\rangle \otimes \hat{\boldsymbol{S}}_2|\downarrow\rangle$$
Donner la forme matricielle des opérateurs $\hat{S}_i^x$, $\hat{S}_i^y$ et $\hat{S}_i^z$ $(i = 1, 2)$ dans la base $\mathcal{B}$.
4. On définit l'opérateur de spin total $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{S}}_1 + \hat{\boldsymbol{S}}_2$. Donner la matrice représentant $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ dans la base $\mathcal{B}$.
5. Diagonaliser l'opérateur $\hat{\boldsymbol{J}}^2$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres. En déduire les valeurs propres de l'opérateur $\hat{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_2$.
6. Déterminer l'action des opérateurs suivants sur les vecteurs propres de $\hat{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_2$:
$$\begin{cases} \hat{P}_{\mathrm{t}} &= \hat{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_2 + \frac{3}{4}\hbar^2 \\ \hat{P}_{\mathrm{s}} &= \frac{1}{4}\hbar^2 - \hat{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_2 \\ \hat{P}_{\mathrm{e}} &= \frac{1}{2}\hbar^2 + 2\hat{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_2 \end{cases}$$
7. On introduit les opérateurs $\hat{N}_\uparrow$ et $\hat{N}_\downarrow$, qui comptent le nombre de spin *up* (respectivement *down*) dans une configuration donnée.
Exprimer l'opérateur $\hat{J}^z = \hat{S}_1^z + \hat{S}_2^z$, qui représente la composante du spin total suivant l'axe z, en fonction de $\hat{N}_\uparrow$ et $\hat{N}_\downarrow$.
8. Écrire $\hat{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_2$ en fonction de $\hat{S}_1^z$, $\hat{S}_1^+$, $\hat{S}_1^-$, $\hat{S}_2^z$, $\hat{S}_2^+$, et $\hat{S}_2^-$.
Montrer que $\hat{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_2$ conserve $\hat{N}_\uparrow$, $\hat{N}_\downarrow$ et $\hat{J}^z$.

Tournez la page s.v.p.

Exercice 2 : Particule dans un piège sphérique

Considérons une particule de masse m soumise au potentiel suivant :

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \equiv \sqrt{x^2+y^2+z^2} < R \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Ecrire le hamiltonien du système en utilisant l'opérateur de moment cinétique $\hat{\boldsymbol{L}}^2$.
2. On factorise la fonction d'onde : $\Psi(r,\theta,\varphi) = \psi_l(r) Y_l^m(\theta,\varphi) = \Psi_{lm}(r,\theta,\varphi)$ où les fonctions $Y_l^m(\theta,\varphi)$ sont les harmoniques sphériques (pourquoi ?).
   (a) Donner la valeur de $\langle r,\theta,\varphi|\hat{\boldsymbol{L}}^2|\Psi_{lm}\rangle$.
   (b) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\psi_l(r)$.
   (c) Quelles sont les conditions aux bords à appliquer à $\psi_l(r)$?
3. Cas $l = 0$.
   (a) Résoudre l'équation de Schrödinger en imposant les conditions aux bords.
   (b) Déterminer les énergies des états caractérisés par $l = 0$. Quelle est leur dégénérescence ?
   (c) Esquisser les fonctions d'onde des trois premiers niveaux d'énergie.
4. Cas $l \neq 0$.
   (a) Pour de petits r, on fait l'ansatz $\psi_l(r) = r^s$. Montrer que l'équation différentielle pour ψ_l impose $s = l$.
   (b) Introduire $\lambda_l(r) = r^{-l}\psi_l(r)$ afin de prendre en compte le comportement asymptotique. Montrer que l'équation radiale devient alors

$$\lambda_l'' + 2(l+1)\frac{\lambda_l'}{r} + k^2\lambda_l = 0 \qquad \text{où} \qquad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

   (c) Montrer que si $\lambda_l(r)$ satisfait l'équation précédente, alors λ_l'/r satisfait l'équation pour $l+1$. En d'autres mots, vérifier que $\lambda_{l+1} = \lambda_l'/r$.
   (d) A l'aide de la relation de récurrence déterminée au point précédent, établir la forme de $\psi_l(r)$ et imposer les conditions aux bords.
   (e) Déterminer les énergies des états ayant $l = 1$. Quelle est leur dégénérescence ?
   (f) Esquisser les fonctions d'onde des trois premiers niveaux d'énergie.