

Mécanique Quantique I, Série 12

Assistants : joseph.saliba@epfl.ch & pierre.lugan@epfl.ch

Exercice 1 : Addition de deux moments cinétiques – Clebsch-Gordan

Nous considérons deux moments cinétiques \hat{J}_1 et \hat{J}_2 avec $J_1 = 1$ et $J_2 = \frac{3}{2}$. On définit — la base produit (tensoriel)

$$\mathcal{B}_1 = \{|J_1 = 1, m_1\rangle \otimes |J_2 = 3/2, m_2\rangle\} \equiv \{|m_1\rangle |m_2\rangle\}$$

— la base du moment cinétique total $\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2$,

$$\mathcal{B}_2 = \{|J_1 = 1, J_2 = 3/2, j, m\rangle\} \equiv \{|j, m\rangle\}$$

1. Quelle est la dimension de l'espace de Hilbert pour ce système ?
2. Quelles sont les valeurs du moment cinétique total j , que nous obtenons en faisant l'addition de \hat{J}_1 et \hat{J}_2 ?
3. Dans le plan (m_1, m_2) , comme vu en cours, tracer les valeurs possibles de m_1 et m_2 , et tracer les lignes $m = \text{constante}$.
4. Quelle est la dimension du sous-espace à m fixé pour chacun des m possibles ?
5. Calculer les coefficients de Clebsch-Gordan

$$(\langle m_1 | \langle m_2 | | j = 5/2, m \rangle$$

pour $-5/2 \leq m \leq 5/2$.

Indications :

- Partir de $|\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\rangle$
- Faire agir l'opérateur d'échelle J^- pour obtenir $|\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\rangle$
- Les recouvrements avec $\langle m_1 | \langle m_2 |$ donnent les coefficients de Clebsch-Gordan.

6. En utilisant la relation d'orthogonalité $\langle j', m | j, m \rangle = \delta_{jj'}$ exprimer $|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle$ dans la base \mathcal{B}_1 .
7. Calculer les coefficients de Clebsch-Gordan

$$(\langle m_1 | \langle m_2 | | j = 3/2, m \rangle.$$

8. Calculer les coefficients de Clebsch-Gordan

$$(\langle m_1 | \langle m_2 | | j = 1/2, m \rangle.$$