Mécanique Quantique I, Corrigé 12

Assistants : joseph.saliba@epfl.ch & pierre.lugan@epfl.ch

Exercice 1 : Addition de deux moments cinétiques – Clebsch-Gordan

Lorsque l'on considère un système de 2 moments cinétiques J_1 et J_2, on peut toujours regarder son état de 2 façons différentes :

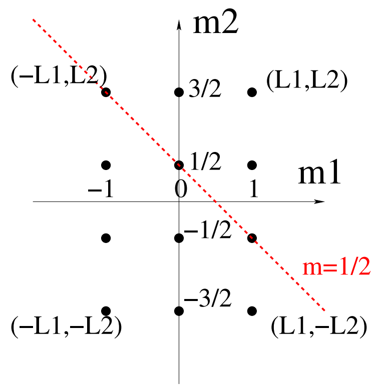
— dans la base $\mathcal{B}_1$, comme un produit tensoriel entre l'état $|j_1, m_1\rangle$ du premier moment cinétique et l'état $|j_2, m_2\rangle$ du second moment cinétique ; état que l'on abrège souvent en $|m_1\ m_2\rangle$. Ici nous utiliserons plutôt la notation $|m_1\rangle|m_2\rangle$ pour ne pas confondre les états des 2 bases et se rappeler qu'il s'agit ici de 2 moments cinétiques.
$\hbar m_1$ et $\hbar m_2$ sont les valeurs propres des opérateurs J_1^z et J_2^z.
$\hbar^2 j_1(j_1+1)$ et $\hbar^2 j_2(j_2+1)$ sont celles des opérateurs $\mathbf{J}_1^2 = J_1^{x\,2} + J_1^{y\,2} + J_1^{z\,2}$ et $\mathbf{J}_2^2$.

— dans la base $\mathcal{B}_2$, comme un seul moment cinétique $|j, m\rangle$. $\hbar m$ est la valeur propre de l'opérateur $J^z = J_1^z + J_2^z$ et $\hbar^2 j(j+1)$ est celle de l'opérateur $\mathbf{J}^2 = (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2)$.

Les relations de Clebsch-Gordan, que nous allons calculer ici permettent de passer d'une représentation à l'autre : ils permettent d'exprimer les éléments de la base $\mathcal{B}_2$ en fonction des éléments de la base $\mathcal{B}_1$, et vice-versa.

1. Pour le moment cinétique J_1, on a $(2 \times 1 + 1) = 3$ états $\{|m_1\rangle, \text{avec}\, m_1 = -1, 0, 1\}$ indépendants et pour le moment cinétique J_2 $(2 \times \frac{3}{2} + 1) = 4$ états $\{|m_2\rangle, \text{avec}\, m_2 = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$ indépendants. On a donc besoin de $3 \times 4 = 12$ états à 2 moments cinétiques indépendants pour décrire l'état du système total : la dimension de l'espace de Hilbert pour ce système est de 12.

2. D'après le cours, les valeurs du moment cinétique total j, que l'on peut obtenir en faisant l'addition de J_1 et J_2 sont données par
$$|J_1 - J_2| \leq j \leq J_1 + J_2$$
donc j ne peut prendre que les valeurs $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ et $\frac{5}{2}$.



3. La figure représente l'ensemble des états de la base $\mathcal{B}_1$ dans le plan (m_1, m_2). Les points appartenant

à la même droite de pente -1 correspondent à des états ayant une même valeur de m.

Remarque
Il est facile de le redémontrer. Soit un état $|m_1\rangle|m_2\rangle$ à 2 moments cinétiques avec m la valeur propre de l'opérateur J^z associée. Par définition,

$$J^z|m_1\rangle|m_2\rangle = (J_1^z + J_2^z)|m_1\rangle|m_2\rangle$$

D'où

$$m|m_1\rangle|m_2\rangle = (m_1 + m_2)|m_1\rangle|m_2\rangle$$

C'est-à-dire

$$m = m_1 + m_2$$

Ainsi si l'on fixe m, on trouve la relation $m_2 = -m_1 + m$ qui est bien l'équation d'une droite de pente -1 dans le plan (m_1, m_2).

4. La dimension du sous-espace à m fixé est donnée par le nombre de points qui sont sur une même droite de pente -1.

   On a donc seulement un point (ou état) qui correspond à $m = \frac{5}{2}$, deux points à $m = \frac{3}{2}$, trois points à $m = \frac{1}{2}$, trois points à $m = -\frac{1}{2}$, deux points à $m = -\frac{3}{2}$, et finalement un point à $m = -\frac{5}{2}$.

5. Dans cette question, on veut calculer les états $|\frac{5}{2}\ m\rangle$ de la base $\mathcal{B}_2$ en fonction des états de la base $\mathcal{B}_1$. Commençons par le plus simple : $|\frac{5}{2}\ \frac{5}{2}\rangle$. En effet, cet état correspond par définition à une valeur de $m = \frac{5}{2}$. Or d'après la question précédente, le seul état de $\mathcal{B}_1$ correspondant à cette valeur de m est l'état $|1\rangle|\frac{3}{2}\rangle$ donc (le choix de la phase est arbitraire)

$$|\frac{5}{2}\ \frac{5}{2}\rangle = |1\rangle|\frac{3}{2}\rangle$$

Passons à $|\frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\rangle$. Comme $m = \frac{3}{2}$, d'après la question précédente, sur la figure, il n'y a que 2 points sur la droite correspondant à $m = \frac{3}{2}$. On en déduit que cet état est une combinaison linéaire de $|0\rangle|\frac{3}{2}\rangle$ et $|1\rangle|\frac{1}{2}\rangle$. Pour trouver laquelle, on applique l'opérateur J^- à l'état $|\frac{5}{2}\ \frac{5}{2}\rangle$ en effectuant le calcul de 2 manières : dans $\mathcal{B}_2$ et dans $\mathcal{B}_1$.

$$J^-|\frac{5}{2}\ \frac{5}{2}\rangle = (J_1^- + J_2^-)|1\rangle|\frac{3}{2}\rangle$$

Comme

$$J^-|j\ m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,|j\ m-1\rangle,$$

le membre de gauche conduit à

$$J^-|\frac{5}{2}\ \frac{5}{2}\rangle = \sqrt{5}\hbar|\frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\rangle \tag{1}$$

À droite, on trouve

$$\begin{aligned}(J_1^- + J_2^-)|1\rangle|\frac{3}{2}\rangle &= \left(J_1^-|1\rangle\right)|\frac{3}{2}\rangle + |1\rangle\left(J_2^-|\frac{3}{2}\rangle\right) \\ &= \sqrt{2}\hbar\,|0\rangle|\frac{3}{2}\rangle + \sqrt{3}\hbar\,|1\rangle|\frac{1}{2}\rangle \qquad (2)\end{aligned}$$

Au final, en utilisant l'égalité entre (1) et (2), on obtient pour $|\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\rangle$:

$$|\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}\,|0\rangle|\frac{3}{2}\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\,|1\rangle|\frac{1}{2}\rangle \tag{3}$$

où les nombres $\sqrt{\frac{2}{5}}$ et $\sqrt{\frac{3}{5}}$ sont les coefficients de Clebsch-Gordan recherchés. En continuant le même processus, nous obtiendrons tous les coefficients pour les vecteurs à $j = 5/2$. Faisons agir J^-

à gauche et à droite de l'équation (3) : à gauche

$$J^-|\frac{5}{2},\frac{3}{2}\rangle = \hbar\sqrt{8}\,|\frac{5}{2},\frac{1}{2}\rangle \tag{4}$$

À droite

$$\begin{aligned} J^-|\frac{5}{2},\frac{3}{2}\rangle &= (J_1^- + J_2^-)\left(\sqrt{\frac{2}{5}}|0\rangle|\frac{3}{2}\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\,|1\rangle|\frac{1}{2}\rangle\right) \\ &= \hbar\frac{2}{\sqrt{5}}\,|-1\rangle|\frac{3}{2}\rangle + 2\hbar\sqrt{\frac{6}{5}}\,|0\rangle|\frac{1}{2}\rangle + 2\hbar\sqrt{\frac{3}{5}}\,|1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle \quad . \end{aligned} \tag{5}$$

En utilisant (4) et (5), nous obtenons

$$|\frac{5}{2},\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\,|-1\rangle|\frac{3}{2}\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\,|0\rangle|\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{3}{10}}\,|1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle \quad . \tag{6}$$

Nous obtenons ainsi trois coefficients de Clebsch-Gordan supplémentaires. En poursuivant cette démarche, on trouve

$$\begin{aligned} |\tfrac{5}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\tfrac{1}{10}}\,|1\rangle|-\tfrac{3}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{3}{5}}\,|0\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{3}{10}}\,|-1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle \\ |\tfrac{5}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle &= \sqrt{\tfrac{2}{5}}\,|0\rangle|-\tfrac{3}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{3}{5}}\,|-1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle \\ |\tfrac{5}{2},-\tfrac{5}{2}\rangle &= |-1\rangle|-\tfrac{3}{2}\rangle \end{aligned} \tag{7}$$

On remarque que pour $j = 5/2$, les coefficients de Clebsch-Gordan sont invariants sous la transformation $m \to -m$, $m_1 \to -m_1$, $m_2 \to -m_2$. Ceci reflète une propriété plus générale, mise en exergue dans l'encadré ci-dessous.

Remarque

Symétrie ou antisymétrie par la transformation $m \to -m$: pour chaque couple (j, m), il existe une phase α_{jm} telle que pour tout m_1, m_2,

$$\langle m_1|\langle m_2|j, m\rangle = e^{i\alpha_{jm}}\langle -m_1|\langle -m_2|j, -m\rangle. \tag{8}$$

On admettra ce résultat, non démontré ici. Comme tous les coefficients de Clebsch-Gordan sont réels, $e^{i\alpha_{jm}} = \pm 1$. Cette phase ne dépend pas de m mais uniquement de j. De façon générale, on montre que

$$\langle m_1|\langle m_2|j, m\rangle = (-1)^{j_1+j_2-j}\langle -m_1|\langle -m_2|j, -m\rangle. \tag{9}$$

6. Nous avons exprimé tous les états de $\mathcal{B}_2$ de la forme $|\frac{5}{2}\ m\rangle$. Passons maintenant à $|\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\rangle$. Comme cet état correspond à une valeur de $m = \frac{3}{2}$, d'après la question 4, il est (comme l'état $|\frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\rangle$) une combinaison linéaire de $|1\rangle|\frac{1}{2}\rangle$ et de $|0\rangle|\frac{3}{2}\rangle$. L'idée de cette question est d'utiliser le fait qu'à partir de ces 2 vecteurs, on ne peut construire que deux vecteurs (à une phase près) qui soient orthonormés. Ainsi $|\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\rangle$ est le seul vecteur du sous-espace $m = \frac{3}{2}$ (à une phase près) orthonormal à $|\frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\rangle$. On exprime $|\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\rangle$ en fonction des 2 états de $\mathcal{B}_1$ correspondant à $m = \frac{3}{2}$

$$|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle = \alpha|0\rangle|\frac{3}{2}\rangle + \beta|1\rangle|\frac{1}{2}\rangle.$$

et on écrit que le produit scalaire de $|\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\rangle$ et $|\frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\rangle$ est nul. Comme on connaît ce dernier état, on trouve

$$\langle\frac{5}{2},\frac{3}{2}|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle = 0 = \sqrt{\frac{2}{5}}\alpha + \sqrt{\frac{3}{5}}\beta \quad ,$$

ce qui donne $\frac{\alpha}{\beta} = -\sqrt{\frac{3}{2}}$. En appliquant la condition de normalisation $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, et fixant la phase de α à 0, nous obtenons

$$|j = \frac{3}{2}, m = \frac{3}{2}\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}|0\rangle|\frac{3}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}|1\rangle|\frac{1}{2}\rangle.$$

Remarque
Nous aurions pu choisir une autre phase, par exemple

$$|j = \frac{3}{2}, m = \frac{3}{2}\rangle = -\sqrt{\frac{3}{5}}|0\rangle|\frac{3}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}}|1\rangle|\frac{1}{2}\rangle.$$

Les coefficients de Clebsch-Gordan appartenant à un sous-espace de j fixe sont définis à une phase près. Le convention de phase dite de Condon-Shortley propose de choisir cette phase de sorte que $(\langle J_1|\langle j - J_1|)|j, j\rangle \in \mathbb{R}^+$, ce qui est réalisé dans l'équation de cet encadré.

7. Pour déterminer l'expression de l'état $|\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\rangle$, on utilise la même méthode que celle utilisée à la question 5. On trouve

$$|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}\,|-1\rangle|\frac{3}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{15}}\,|0\rangle|\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}}\,|1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle \quad , \tag{10}$$

Quant aux états $|\frac{3}{2}\ m\rangle$ avec $m < 0$, on utilise les symétries. Il faut déterminer si $\alpha_{jm} = \alpha_j = \pm 1$ (voir remarque de la question 5). Pour cela, il suffit de remarquer qu'en appliquant J^- à l'équation (10), le coefficient de l'état $|1\rangle|-\frac{3}{2}\rangle$ va être celui de l'état $|1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$, à un facteur $\hbar\sqrt{\ldots}$ positif près. Il sera donc négatif. On en déduit que cette fois, pour $j = 3/2$, les coefficients de Clebsch-Gordan sont antisymétriques pour $m \to -m$.

$$\begin{aligned} |\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\tfrac{8}{15}}\,|-1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{15}}\,|0\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\tfrac{2}{5}}\,|1\rangle|-\tfrac{3}{2}\rangle \\ |\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\rangle &= \sqrt{\tfrac{2}{5}}\,|-1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\tfrac{3}{5}}\,|0\rangle|-\tfrac{3}{2}\rangle \end{aligned} \tag{11}$$

8. On suit l'approche de la question 6 : $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ appartient au sous-espace engendré par les états $|-1\rangle|\frac{3}{2}\rangle$, $|0\rangle|\frac{1}{2}\rangle$ et $|1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$, tout en étant orthogonal aux états $|\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ et $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, dont nous connaissons déjà la décomposition dans la base $|m_1\rangle|m_2\rangle$. Pour simplifier les calculs, on remarque que comme $|\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ et $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ sont normés, $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ s'obtient, à une phase près, comme produit vectoriel de ces deux vecteurs. Dans la base $\{|-1\rangle|\frac{3}{2}\rangle, |0\rangle|\frac{1}{2}\rangle, |1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle\}$, ceci s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ \sqrt{3/5} \\ \sqrt{3/10} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{2/5} \\ 1/\sqrt{15} \\ -\sqrt{8/15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Par convention, on choisit $\langle 1|\langle -\frac{1}{2}|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle > 0$, d'où

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle|\frac{3}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle|\frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle. \tag{13}$$

L'application de l'opérateur d'échelle J^- au membre de gauche et de $J_1^- + J_2^-$ au membre de droite conduit au résultat

$$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|-1\rangle|\frac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle|-\frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle|-\frac{3}{2}\rangle, \tag{14}$$

autrement dit les coefficients sont invariants sous l'opération $m \to -m$, en accord avec la formule (9).