# Suites arithmétiques et séries hypergéométriques généralisées.

D. Müller, E. Musk, D. J. Trump, self-made president of United States of America

19.03.2023

## Une famille d'actions et d'opérateurs intéressante

Pour simplifier la discussion, considérons le corps $K := \mathcal{M}(\mathbf{C})$ des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$. Pour $p \geq 1$, le groupe $\mu_p$, des racines $p$-ième de l'unité (pas forcément primitives) agit sur $\mathbf{C}$ par multiplication et donc sur $K$, via l'opérateur

$$[\gamma^* f](x) = f(\gamma^{-1}x),$$

pour $\gamma \in \mu_p$, $x \in \mathbf{C}$, et $f \in K$. Comme l'union des $\mu_p$ est le groupe $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, on peut considérer cette famille d'actions comme une seule action, toutefois pour l'instant, nous considérerons les actions séparémment. Pour chaque $\mu_p$ et $k \in \mathbf{Z}$, nous définissons l'opérateur

$$T_{p,k} := \frac{1}{p}\sum_{\gamma\in\mu_p} \gamma^k \cdot \gamma^* = \int_{\mu_p} x^k x^* \mathrm{d}x.$$

L'idée de cet opérateur est d'extraire d'une série de Laurent

$$f(z) := \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n,$$

la *sous-série de Laurent arithmétique* de raison $p$ et de graine $k$;

$$[T_{p,k} f](z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_{np+k} \cdot z^{np+k}.$$

Notons quelques propriétés et passons notre chemin pour cette fois.

**Proposition 1.** *La famille d'opérateurs $(T_{p,k})$ possède les propriétés suivantes*

*(1) Ils commutent entre eux;*

$$T_{n,k}T_{m,l} = T_{m,l}T_{n,k}.$$

*(2) Ce sont des projections;*

$$T_{n,k}^2 = T_{n,k}.$$

*(3) Si $\partial$ est l'opérateur de dérivée sur $K$, alors*

$$\partial T_{n,k} = T_{n,k-1}\partial.$$

*(4) Pour tout $n, m \geq 1$ et $k \in \mathbf{Z}$, nous avons la relation de filtration*

$$T_{n,k} = \sum_{l=1}^{m} T_{nm,ln+k}.$$

*(5) Pour $n, m \geq 1$, et $k, l \in \mathbf{Z}$, posons $r := \operatorname{ppcm}(n, m)$ et $d := \operatorname{pgcd}(n, m)$. Si $d$ divise $k - l$, alors il existe une unique solution $\pmod r$ de l'équation*

$$\begin{cases} x \equiv k & \pmod n, \\ x \equiv l & \pmod m. \end{cases}$$

*Dans ce cas nous avons*

$$T_{n,k} T_{m,l} = T_{r,x}.$$

*Dans le cas contraire ($d$ ne divise pas $k - l$), nous avons*

$$T_{n,k} T_{m,l} = 0.$$

## Mais où investir tous mes milliards ?

Prenons $f(z) := \exp(z)$ et considérons

$$G_{p,k}(z) := \sum_{n \geq 0} \frac{z^{pn+k}}{(pn+k)!} = \frac{1}{p} \sum_{\gamma \in \mu_p} \gamma^{-k} e^{\gamma z} = [T_{p,k} f](z).$$

En prenant la dérivée nous obtenons

$$G'_{p,k} = G_{p,k-1},$$

et plus généralement la matrice

$$M(t) := \begin{pmatrix} G_{p,0}(t) & G_{p,1}(t) & \cdots & G_{p,p-1}(t) \\ G'_{p,0}(t) & G'_{p,1}(t) & \cdots & G'_{p,p-1}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G^{(p-1)}_{p,0}(t) & G^{(p-1)}_{p,1}(t) & \cdots & G^{(p-1)}_{p,p-1}(t) \end{pmatrix}$$

est la *matrice fondamentale* de l'équation différentielle

$$y^{(p)} = y,$$

satisfaisant $M(0) = \mathrm{id}$. De plus, en utilisant la notation standard pour les *functions hypergéométriques*[1] *généralisées*, nous pouvons écrire

$$G_{p,0} = {}_0F_{p-1}\left( ; \frac{1}{p}, \ldots, \frac{p-1}{p}; \left(\frac{z}{p}\right)^p \right).$$

Voici une propriété intéressante que j'ai prouvée.

**Proposition 2.** *Pour $p$ premier, les relations polynomiales entre les $G_{p,k}$, $k = 0, \ldots, p-1$ sont engendrées par le polynôme*

$$Q_p(X_0, \ldots, X_{p-1}) := \left( \prod_{\gamma \in \mu_p} \sum_{j=0}^{p-1} \gamma^j X_j \right) - 1.$$

*Plus précisément, le noyau du morphisme*

$$\mathbf{C}[X_0, \ldots, X_{p-1}] \longrightarrow \mathbf{C}[G_{p,0}, \ldots, G_{p,p-1}],$$

*est $(Q_p)$.*

[1] Pour plus d'informations, se renseigner par soi-même.

On peut calculer $Q_2(X,Y) = X^2 - Y^2 - 1$, $Q_3(X,Y,Z) = X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ - 1$. C'est un tour de force calculer $Q_5$ et qu'en est-il de $Q_{29}$ ? L'idée de cette proposition est que la $p-1$-variété algébrique $\mathcal{G}_p$ définie par l'équation

$$Q_p(x) = 0,$$

est paramétrisée par les $G_{p,k}$, de la même manière que l'hyperbole et le cercle sont paramétrisés par $(\cosh(t), \sinh(t))$ et $(\cos(t), \sin(t))$ respectivement. Voici quelques conjectures à investiguer à leurs sujets:

**Conjecture 1.** *Les idéaux $(Q_p)$ sont maximaux.*

**Conjecture 2.** *Les courbes $(G_{p,0}(t), \ldots, G_{p,p-1}(t))$ sont intéressantes.*

Que peut-on dire des surface de Riemann associées aux polynômes $Q_p$ ?

## Racines et le retour sur investissement

Soit $p > 1$ un nombre premier, prenons $\eta_p$ une racine $p$-ième de $-1$ et considérons

$$\tilde{G}_{p,k}(x) \coloneqq G_{p,k}(\eta x).$$

Plus simplement, pour $p = 2$, $\tilde{G}_{p,k}(x) = G_{p,k}(ix)$ et pour $p$ impair $\tilde{G}_{p,k}(x) = G_{p,k}(-x)$. Soit $R(p,k)$ l'ensemble des zéros de $\tilde{G}_{p,k}$. Observons que pour tout $\gamma \in \mu_p$,

$$G_{p,k}(\gamma x) = \gamma^k G_{p,k}(x),$$

ainsi le groupe $\mu_p$ agit sur $R(p,k)$. Voici les conjectures à investiguer :

**Conjecture 3.** *Toutes les orbites non-triviales dans $R(p,k)/\mu_p$ intersectent $\mathbf{R}_{>0}$.*

**Conjecture 4.** *Supposons que la conjecture 3 soit vraie, alors il suffit d'étudier $R(p,k) \cap \mathbf{R}_{>0}$. J'affirme que $R(p,k)$ est infini dénombrable, et qu'ainsi les racines réelles positives peuvent être ordonnées*

$$0 < \theta_1(p,k) < \theta_2(p,k) < \ldots$$

*Et qu'en plus les racines sont* quasi-périodiques à décroissance exponnentielle*, plus précisement, il existe $\alpha_p, \beta_p > 0$, et $c_{p,k} \in \mathbf{R}$, telles que quand $n \to \infty$,*

$$\theta_n(p,k) = n\alpha_p + c_{p,k} + O(e^{-\beta_p n}).$$

Par exemple, pour $p = 3$, on voit en déroulant que les racines $\theta_n \coloneqq \theta(3,0)$ de $G_{3,0}(-x)$ doivent satisfaire

$$\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\theta_n\right) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}\theta_n},$$

ce qui montre directement que $\theta_n = \frac{\pi}{\sqrt{3}}(2n-1) + O(e^{-\sqrt{3}\pi n})$.

**Conjecture 5.** *Si les conjectures 3 et 4 sont vraies, alors il n'est pas trop fou de conjecturer que $G_{p,k}$ admet une écriture en produit infini*

$$G_{p,k}(x) = \frac{x^k}{k!}\prod_{n\geq 1}\left(1 + \frac{x^p}{(\theta_n(p,k))^p}\right),$$

*dans un domaine étoilé en 0, non-trivial.*

En particulier, pour $p = 3$, en comparant les coefficient du produit et de la série de Taylor on aurait pour $k = 0, 1, 2$,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\theta_n(3,k)^3} = \frac{1}{(3+k)!},$$

et en même temps

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(6n-3+2k)^3} = \frac{\pi^3}{27\sqrt{27}} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\theta_n(3,k)} + S(3,k), \tag{1}$$

où $S(3,k)$ est une série qui converge extrêmement rapidement. D'où la conjecture:

**Conjecture 6.** *Pour p premier, le réel*

$$\upsilon_p := \frac{\zeta(p)(\sqrt{p})^p}{\pi^p}$$

*est rationnel.*

Laurent, si t'es chaud tu peux plot les zéros (dans $\mathbf{C}$) de $\tilde{G}_{p,k}$ pour $p = 5$ et $p = 7$ ça serait déjà intéressant pour moi. Donc pour être clair, ploter les zéros de

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{5n}}{(5n)!}(-1)^n = \frac{1}{5}\left(e^{-x} + e^{-\gamma x} + \ldots + e^{-\gamma^4 x}\right),$$

où $\gamma = e^{2\pi i/5}$.